※複數方根的幾何意涵

一、棣美弗定理

棣美弗定理

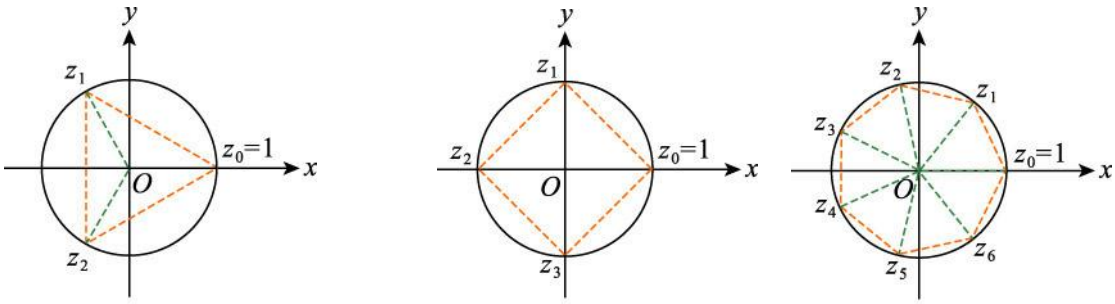
若複數 z 的極式為 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$，則對於任意整數 n

$$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

均成立.

二、1 的 n 次方根

(1) $z^3=1$ (2) $z^4=1$ (3) $z^7=1$



$n=3$ $n=4$ $n=7$

1. 試化簡下列各式的值

(1) $\left(1-\sqrt{3}i\right)^{10}=$ _____。

(2) $(\sqrt{3}-i)^{-6}=$ _____。

(3) $\left(\dfrac{1+i}{1+\sqrt{3}i}\right)^{24}=$ _____。

(4) $\dfrac{(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3})(\sin\frac{\pi}{6}+i\cos\frac{\pi}{6})^2}{(-\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3})^3}=$ _____。

2. 已知 ω= $\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$ ，則下列敘述何者正確？

(1) $\omega^5=1$　　(2) ω 為 $z^5=1$ 的根 (3) ω 為 $z^{10}=1$ 的根　　(4) $\omega=\frac{1}{\omega}$

(5) $|\omega|=|\omega^4|$

3. (1)求 $z^6=1$ 的根

(2)求 $z^7=1$ 的根

4. 解 $z^6=4+4\sqrt{3}i$

答案：1.(1) $2^{10}(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)$ **(2)** $\frac{-1}{64}$　　**(3)** $\frac{1}{4096}$　　**(4)** $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$　　**2.** (1)(2)(3)(5)

3. (1) $\pm1,\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2},\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$　　$\cos\frac{2k\pi}{7}+i\sin\frac{2k\pi}{7}$, $k=0,1,2,3,4,5,6,$

4. $\sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{18}+\frac{2k\pi}{6})+i\sin(\frac{\pi}{18}+\frac{2k\pi}{6})),k=0,1,2,3,4,5$