

## 平面上線性變換的性質

◆ 給定二階方陣  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，方陣  $A$  將平面上每一點  $P(x, y)$  變換到  $P'(x', y')$ ，

其坐標關係式為  $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$ ，用矩陣的乘積可表為  $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 。

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  變換到  $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$  的對應關係稱為**平面上的線性變換**。行矩陣  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  除了可以為點  $P$  的坐標外，也可以視為**向量** $\overrightarrow{OP} = (x, y)$ ，因此平面上的線性變換不僅可以為「**平面上點與點**」間的變換，也可以視為「**平面上向量與向量**」間的變換。

1. 設  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$  所定義的線性變換為  $T$ ，試求

(1)  $(1, 0)$ ， $(0, 1)$  在變換  $T$  下的點。

(2) 點  $R(2, 3)$  變換  $T$  下的點。

(3) 若變換  $T$  將點  $S$  對應到  $S'(8, -5)$ ，試求  $S$  點坐標。

2. 設二階方陣  $A$  將  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  對應到  $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ，將  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  對應到  $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ，

(1) 試求二階方陣  $A$ 。

(2) 試問  $A$  會將點  $(2, -4)$  對應到哪一點？

(3) 設  $P(1, 0)$ 、 $Q(0, 1)$ 、 $R(-2, 3)$ 、 $S(1, -2)$ ，說明直線  $PQ$  上的點經由  $A$  的變換後會落在直線  $RS$  上。

3. 已知二階方陣 A 分別將向量  $\vec{a}=(3,-1)$  與  $\vec{b}=(-1,2)$  對應到向量  $\vec{d}=(9,8)$  與  $\vec{e}=(-8,-1)$ ，設向量  $\vec{u}=3\vec{a}+2\vec{b}$
- (1) 試問  $\vec{u}$  經由 A 會對應到哪個向量？
- (2) 試求二階方陣 A。

結論：

設二階方陣  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  代表了平面上的線性變換 T，線性變換 T 具有下列性質：

一、某些點(向量)經由 T 的對應會有特殊意義：

(1) T 將原點 O 對應到原點 O。  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{T} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(2) 矩陣  $A = [T(e_1) \ T(e_2)]$

[說明]：

(1) T 將單位向量  $\vec{e}_1 = (1,0)$  [點(1,0)] 對應到 A 之第 1 行「行矩陣」所代表的向量(點)。

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{A} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}。$$

(2) T 將單位向量  $\vec{e}_2 = (0,1)$  [點(0,1)] 對應到 A 之第 2 行「行矩陣」所代表的向量[點]。

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{A} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}。$$

求得  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  與  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  所對應的  $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$  與  $\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ ，就可表示出  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = [T(e_1) \ T(e_2)]$ 。

三、 $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = x\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$

[說明]：

因為  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ ，所以  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{A}} x \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ 。

向量  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  表為  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  與  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  的線性組合  $x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，經由  $\mathbf{A}$  的變換後都能表成  $\mathbf{A}$  的第一行

與第二行的行矩陣(向量)所成的線性組合  $x \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ ，而且係數不會改變。

故  $\mathbf{A} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$  與  $\mathbf{A} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$  就刻劃了線性變換  $\mathbf{A}$  是如何對應的行為了。

## 參考解答

### 1. [解法]：

(1)

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \leftarrow A \text{ 的“第 1 行”行矩陣，}$$

$$A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} \leftarrow A \text{ 的“第 2 行”行矩陣。}$$

故  $(1, 0), (0, 1)$  經過  $T$  分別對應到分別為  $(2, 1), (-1, 4)$ 。

$$(2) A \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 14 \end{bmatrix}。$$

(3) 設  $S(x, y)$ ，則

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -5 \end{bmatrix}，\text{因為 } A^{-1} \text{ 存在}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 8 \\ -5 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}。$$

### 2. [解法]：

$$(1) \text{ 設 } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}，\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{A} A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}；\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{A} A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{故 } A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}。$$

換句話說，只要知道  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  與  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  被對應到的點，就可以知道二階方陣了。

$$(2) \text{ (解法一)：根據線性變換的定義：} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 14 \end{bmatrix}$$

(解法二)：

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} (2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (-4) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = 2 \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} + (-4) \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 14 \end{bmatrix}$$

(3) 設  $T(x, y)$  為直線  $PQ$  上的點， $T$  點經由  $A$  變換至  $T'$  點，

因為  $T$  在直線  $PQ$  上， $\overrightarrow{OT} = x\overrightarrow{OP} + y\overrightarrow{OQ}$  且  $x+y=1$

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A(x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = x \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}，\text{這個結果可視為 } \overrightarrow{OT'} = x\overrightarrow{OR} + y\overrightarrow{OS}，$$

由於  $x+y=1$ ，所以  $R, T', S$  三點共線。

故直線  $PQ$  上的點經由  $A$  的變換後會落在直線  $RS$  上。

3. [解法]：

$$(1) A(\overrightarrow{u}) = A(3\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b})$$

$$= 3A(\overrightarrow{a}) + 2A(\overrightarrow{b}) = 3\overrightarrow{d} + 2\overrightarrow{e}$$

$$= 3\begin{bmatrix} 9 \\ 8 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -8 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$(2) \because A\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \end{bmatrix}, A\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -8 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 9 & -8 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & -8 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \left( \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}。$$