「無理數的發現」學習單

蘇麗敏老師

一、無理數到底有多無理

1.有理數的英文 rational number 看，rational 一般的理解都是「有道理的」，那麼，應該是什麼道理？從 ration 的拉丁文語源來看，它源自於拉丁語的 logos（英 文是 ratio，意思為比），拉丁文的原意是「可表達的」，對畢氏學派而言，有理數就是分 數，意思是可表達的數。有理數是「**可表達的數**」，即可寫成兩個整數之比。

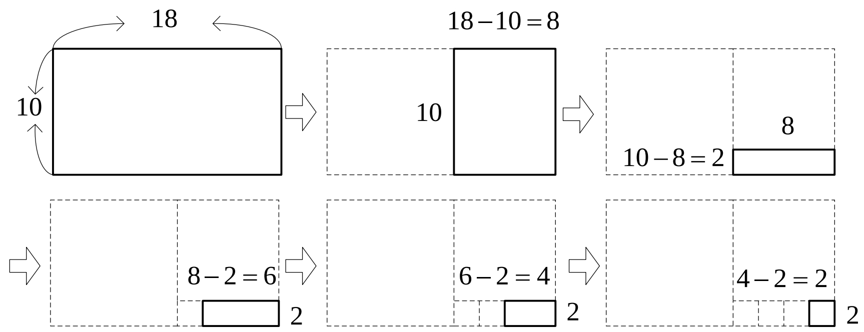
2.無理數 irrational number，表示「不可表達的數」， 也就是不能寫成兩個整數之比的數。所以無理數是指「**不可表達的數**」。

二、「可公度量的」(commensurable)

有理數是「**可表達的數**」，即可寫成兩個整數之比。即可以化成最簡分數的形式 $\dfrac{q}{p}$，其中 p,q 互質。例如，$\dfrac{12}{18}=\dfrac{6\times 2}{6\times 3}=\dfrac{2}{3}$。如果用兩個線段長來說，表示 12 和 18 可以找到共同單位長 6 量盡它們，我們稱之為「**可公度量的**」(commensurable)。反之，如果無法表示成分數形式，代表兩個線段長無法找到共同單位長同時量盡，就稱為「**不可公度量的**」(incommensurable)。

例如：可公度量的說明：

給定長 18 cm，寬 10 cm 的長方形紙片一張，今剪去一個最大正方形後，將剩下的長方形紙片再剪去一個最大正方形，如此繼續做，直到剩下的的紙片是正方形才停止，則最後剩下的正方形邊長為 2cm，如下圖。所以就可將 18，10 用 2 當基本單位來度量，即 $18=9\times 2$ ； $10=5\times 2$：



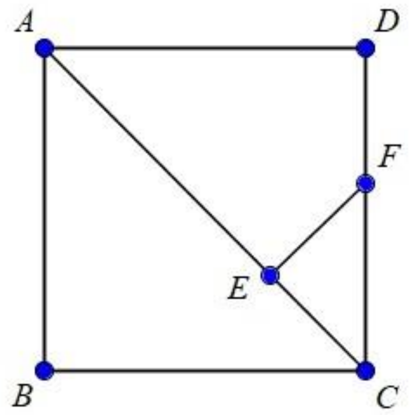
用現在的話語來說，也就是 18 和 10 這兩個數，可以 2 當基本單位長來度量，所以 $\dfrac{18}{10}$ 是有理數。

三、為何$\sqrt{2}$是無理數

歐幾里得《幾何原本》第十卷命題 2：
如果從兩不等量的大量中連續減去小量，直到餘量小於小量，再從小量中連續減去餘量直到小於餘量，如此一直作下去，當所餘的量永遠不能量盡它前面的量時，則兩量不可公度。

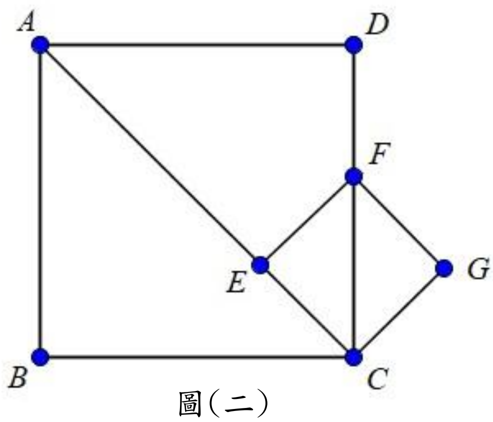
根據上面的說明，我們要來推導$\sqrt{2}$與 1 是不可公度量的，藉以說明$\sqrt{2}$是無理數。我們將利用下面的圖形說明！
下圖(一)中 $ABCD$ 為一正方形，欲利用此圖說明$\overline{AC}$、$\overline{AD}$不可公度，即將$\overline{AC}$、$\overline{AD}$不斷的互減，並說明兩個線段長無法找到基本單位長同時量盡，就可稱$\overline{AC}$、$\overline{AD}$為「**不可公度量的**」。試著看完影片後，回答下列問題：

問題 1：如圖(一)，在$\overline{AC}$中量測一線段長$\overline{AE}=\overline{AD}$，過 E 做$\overline{AC}$的垂直線交$\overline{CD}$於 F 點，試證明：$\overline{DF}=\overline{EC}$。



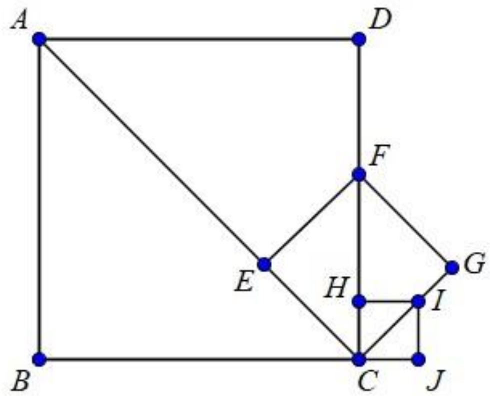
圖(一)

問題 2：如圖(二)，承問題 1，做一正方形 $CEFG$，如果[illegible]單位長 d，可量盡$\overline{AC}$、$\overline{AD}$，試說明 d 也可量盡$\overline{CF}$、$\overline{CE}$。



圖(二)

- 問題 3. 如圖(三)，令 $\overline{AD}=1$，承問題 2，試說明下圖中的小正方形 $HIJC$ 如何做出？並依此概念推廣，說明 $\sqrt{2}$ 與 1 是不可公度量。



參考資料

1. 張鎮華教授：無理數到底有多無理
2. 蘇惠玉老師：有理數與無理數-可公度量與不可公度量

參考答案：

問題1：[解] 因為$\angle AEF = \angle ADF = 90^\circ$，且$\overline{AE} = \overline{AD}$，又$\overline{AF}$ 為共同邊，

所以$\Delta AEF \cong \Delta ADF(RHS)$，則$\overline{DF} = \overline{EF}$，又$\angle ECF = 45^\circ$，

$\angle FEC = 90^\circ$，則$\overline{EC} = \overline{EF} = \overline{DF}$。

問題2. [解]若 d 可以量盡$\overline{AC}$、$\overline{AD}$，又$\overline{CE} = \overline{AC} - \overline{AD}$，故 d 可以量盡$\overline{CE}$，

由 1-1 中知$\overline{DF} = \overline{EC}$，則$\overline{CF} = \overline{CD} - \overline{DF} = \overline{AD} - \overline{CE}$，所以 d 也可以量

盡$\overline{CF}$，即 d 可同時量盡$\overline{CE}$、$\overline{CF}$。

[另解] 代數方法：若 d 可以量盡$\overline{AC}$、$\overline{AD}$，可設$\overline{AC}=sd$，$\overline{AD}=td$

（s,t 為正整數），將$\overline{CE}$、$\overline{CF}$以 s,t,d 表示，即可證明。

問題3. [解](1)在$\overline{CF}$上量取一線段$\overline{FH} = \overline{CE}$，過 H 做直線垂直$\overline{CF}$，並交$\overline{CG}$於

點 I，由$\angle HCI = 45^\circ$，可得$\overline{HC} = \overline{HI}$，並依此做出正方形 $HIJC$。

(2)承 1-2 同理可得，若存在一基本單位長 d，可量盡$\overline{CF}$、$\overline{CE}$，則此 d

也可以量盡$\overline{CH}$、$\overline{CI}$，依此類推，這樣的小正方形可以無窮多次的操作

下去，因此無法找到最小基本單位長 d。

所以$\overline{AC}$、$\overline{AD}$不可公度，即$\sqrt{2}$與 1 是不可公度量。