114 舞動數學學習單【出入相補知多少】

教師：林靖捷

課程名稱	出入相補知多少
設計理念 (使用時機、學習目標等)	本課程的設計理念是作為畢氏定理的延伸課程，引入劉徽著名的出入相補原理，搭配動畫讓學生思考其中的數學性質，理解並欣賞其證明畢氏定理的巧妙手法。

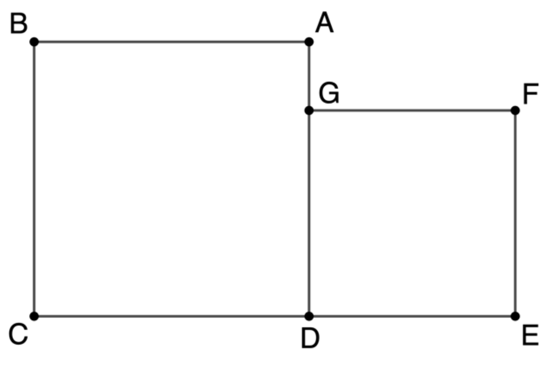
學習單內容(教學例題、教學活動等)

東漢末年數學家劉徽在《九章算術注》裡，創建割補術「出入相補、以盈補虛」的原理，以「青朱出入圖」（如右圖）證明畢氏定理。以下的任務將帶領同學們探究其中的數學性質，並了解劉徽當時證明畢氏定理的巧思！

請觀看「出入相補」動畫，然後回答下列問題：

【任務 1-1】

如圖，已知四邊形 ABCD 和四邊形 DEFG 皆為正方形，其中 G 點在$\overline{AD}$上。請以尺規作出正方形 EAHI（I 點在正方形 ABCD 的下方），並標示$\overline{AE}$與$\overline{FG}$的交點 P、$\overline{HI}$與$\overline{CD}$的交點 Q。



【任務 1-2】

承上題，H 點在$\overline{BC}$上嗎？為什麼？

【任務 2-1】

在任務 1-1 的圖中以尺規作$\overline{IJ}$，使$\overline{IJ}$垂直$\overline{CE}$於 J 點。

【任務 2-2】

說明$\triangle ABH \cong \triangle EJI$。

【任務 2-3】

說明$\triangle EFP \cong \triangle IJQ$。

【任務 2-4】

說明$\triangle HCQ \cong \triangle AGP$。

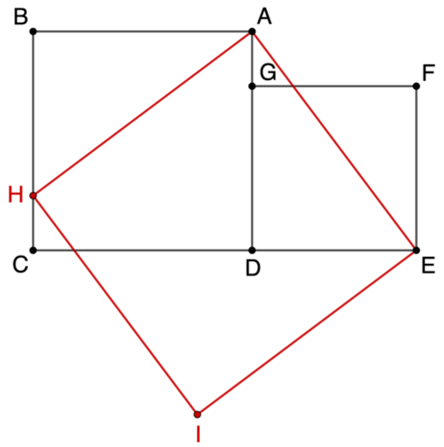
【任務 3】

利用上述任務和「出入相補」動畫證明畢氏定理。

教學指引

各任務的參考答案如下：

【任務 1-1】



則正方形 EAHI 即為所求（作圖痕跡省略）

【任務 1-2】

在$\overline{BC}$上取一點H'使$\overline{AH'} = \overline{AE}$，

在$\triangle ADE$與$\triangle ABH'$中

$\because \angle ADE = \angle ABH'$

$\overline{AE} = \overline{AH'}$

$\overline{AD} = \overline{AB}$

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle ABH'$（RHS）

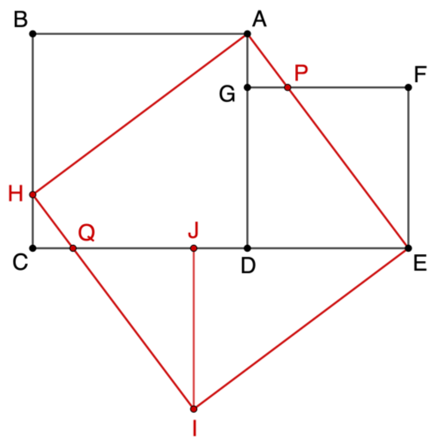
$\therefore \angle EAD = \angle H'AB$

$\therefore \angle EAH' = \angle EAD + \angle DAH' = \angle H'AB + \angle DAH' = 90^{\circ}$

$\therefore H' = H$

故 H 點在$\overline{BC}$上

【任務 2-1】



則$\overline{IJ}$即為所求（作圖痕跡省略）

【任務 2-2】

在$\triangle ABH$與$\triangle EJI$中

$\because \angle ABH = \angle EJI = 90^\circ$

$\angle HAB = \angle EAD = \angle IEJ$

$\overline{AH} = \overline{EI}$

$\therefore \triangle ABH \cong \triangle EJI$（AAS）

【任務 2-3】

在$\triangle EFP$與$\triangle IJQ$中

$\because \angle EFP = \angle IJQ = 90^\circ$

$\angle PEF = \angle IEJ = \angle QIJ$

$\overline{EF} = \overline{DE} = \overline{BH} = \overline{JI}$

$\therefore \triangle EFP \cong \triangle IJQ$（ASA）

【任務 2-4】

在$\triangle HCQ$與$\triangle AGP$中

$\because \angle HCQ = \angle AGP = 90^\circ$

$\angle CQH = \angle JQI = \angle FPE = \angle GPA$

$\overline{HC} = \overline{AG}$（$\because \overline{BH} = \overline{DE} = \overline{GD}$）

$\therefore \triangle HCQ \cong \triangle AGP$（AAS）

【任務 3】

已知：$\triangle ADE$為直角三角形（$\angle ADE = 90^\circ$）

求證：$\overline{AD}^2 + \overline{DE}^2 = \overline{AE}^2$

$\because \triangle ABH \cong \triangle EJI$

$\triangle EFP \cong \triangle IJQ$

$\triangle HCQ \cong \triangle AGP$

$\therefore ABCD + DEFG$

$= \triangle ABH + \triangle HCQ + AHQD + \triangle EFP + DEPG$

$= \triangle EJI + \triangle AGP + AHQD + \triangle IJQ + DEPG$

$= EAHI$

即$\overline{AD}^2 + \overline{DE}^2 = \overline{AE}^2$

故得證

* 任務 1-2 可視學生能力給予引導或提示：在$\overline{BC}$上取一點H'使$\overline{AH'} = \overline{AE}$，再利用$\triangle ADE \cong \triangle ABH$完成證明
* 任務 3 可引導學生利用任務 2-2 至任務 2-4 的 3 組全等三角形證明影片中的出入相補確實可行（透過切割拼補將以兩股為邊的正方形等積變換成以斜邊為邊的正方形）