110 學年度高級中學數學科能力競賽複賽試題

南區（高雄區）　　　筆試（二）{參考解答}

一、設 m 與 n 為兩互質的正整數，已知$30m+n$ 與$30n+m$ 兩數不互質，試求出他們所有的公因數。

【參考解答】

令 $d>1$ 且滿足 $d \mid (30m+n)$ 和 $d \mid (30n+m)$，
同乘30倍可得 $d \mid (900m+30n)$ 與 $d \mid (900n+30m)$，
將上兩行相減可得 $d \mid 899n$ 與 $d \mid 899m$ ，
因 m 與 n 互質，所以 $d \mid 899$。

29 , 31 , 899

二、設 x, y 為實數，且為下式的解。求 $x+y$ 的值為何?

$$\begin{cases} (x-2)^3+2021(x-2)=2 \\ (y-2)^3+2021(y-2)=-2 \end{cases}$$ 。

【參考解答】

令 a=x−2, b=y−2，則式子可改為

$$\begin{cases} a^3+2021a=2 \\ b^3+2021b=-2 \end{cases}$$

因此我們有

$$0=a^3+b^3+2021a+2021b$$
$$=(a+b)(a^2-ab+b^2)+2021(a+b)$$
$$0=(a+b)(a^2-ab+b^2+2021)$$

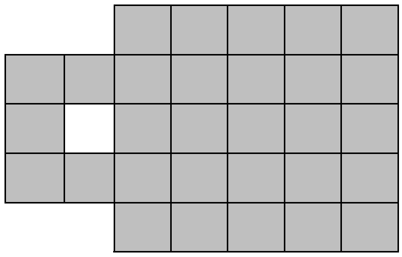
注意到 $a^2-ab+b^2+2021=\frac{1}{2}(a^2+b^2+(a-b)^2)+2021>0$

因此，只可能是$0=a+b=(x-2)+(y-2)$，因此，x+y=4

三、在下右圖的區域中，我們只允許往上下左右相鄰的格子移動。

請問是否存在每一個格子恰好經過一次而且轉彎的次數少於 11 次的路徑？

（須說明或證明妳(你)的答案）



【參考解答】

如果把格子交錯塗成黑色跟白色，會發現它們的個數會差 2。可是對每一個路徑，黑白格子會間隔出現，所以最多只能差一個，因此這樣的路徑不存在。

四、設 x 是實數，函數$f(x)$滿足$f(x)-f(x-1)=x^3$。已知 $f(10)=30$， 求$f(200)$除以 10000 之餘數為何?

【參考解答】

$$f(11)=11^3+f(10)$$

$$f(12)=12^3+f(11)=12^3+11^3+f(10)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f(200)=200^3+199^3+...+11^3+f(10)$$

$$=\left(\frac{200(201)}{2}\right)^2-\left(\frac{10(11)}{2}\right)^2+f(10)$$

$$=(201)^2\times 10000-3025+30$$

故餘數為7005