110 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

第四區(台南一中)數學科筆試(一)試題

編號：__________

注意事項：

(1). 考試時間：2 小時。
(2). 本試卷共四題，滿分 49 分。第一題 12 分，第二題 12 分，第三題 12 分，第四題 13 分。
(3). 將計算及證明過程寫在答案卷上。
(4). 不可使用電算器。
(5). 試題及計算紙必須連同答案卷交回。

一、設正整數a,b,c,d滿足$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}<1$且$\mathrm{a}+\mathrm{c}=10$，試求$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$的最大值。

二、已知a,b,c,d為正數，且滿足$abcd=1$，試證：

$$\frac{1+ab}{1+a}+\frac{1+bc}{1+b}+\frac{1+cd}{1+c}+\frac{1+da}{1+d}\geq 4$$

三、某網球隊有偶數n個選手，進行了兩輪的單循環比賽。在每輪的比賽中，每兩人都比一場，比賽結果若為和局，則兩人各得1分；若有分出勝負，則贏者得2分，敗者得0分。如果在第二輪比賽中，每個選手的得分之和都比第一輪比賽變化了不少於n分，則每個選手都剛好變化多少分？請證明你的答案。

四、對自然數n，令$a_n=\left[\frac{7^n}{8}\right]$，其中$[x]$表示不超過$x$的最大整數，若$b_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$，試求$b_{2022}$除以50的餘數。

110 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

第四區(台南一中)數學科筆試(一)試題

編號：___________

注意事項：

(1). 考試時間：2 小時。
(2). 本試卷共四題，滿分 49 分。第一題 12 分，第二題 12 分，第三題 12 分，第四題 13 分。
(3). 將計算及證明過程寫在答案卷上。
(4). 不可使用電算器。
(5). 試題及計算紙必須連同答案卷交回。

一、設正整數a,b,c,d滿足$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}<1$且$\mathrm{a}+\mathrm{c}=10$，試求$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$的最大值。

【參考解答】

根據對稱性，不妨設$a\le c$

$\because \frac{a}{b}+\frac{c}{d}<1 \quad \therefore b>a, d>c$

令$b=a+p, d=c+q$，其中p,q為正整數

$\because 1-\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)=1-\left(\frac{a}{a+p}+\frac{c}{c+q}\right)=\frac{pq-ac}{(a+p)(c+q)}>0 \quad \therefore pq>ac \Rightarrow pq\ge ac+1$

$\because (a+p)(c+q)=ac+aq+pc+pq$

$=ac+pq+cpq+a-(q-1)(cp-a)$

$\le ac+pq+cpq+a$

$=(a+pq)(c+1)$

$\therefore 1-\left(\frac{a}{a+p}+\frac{c}{c+q}\right)=\frac{pq-ac}{(a+p)(c+q)}\ge\frac{pq-ac}{(a+pq)(c+1)}=1-\left(\frac{a}{a+pq}+\frac{c}{c+1}\right)$

$\therefore \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a}{a+p}+\frac{c}{c+q}\le\frac{a}{a+pq}+\frac{c}{c+1}\le\frac{a}{a+ac+1}+\frac{c}{c+1}=1-\frac{1}{(a+ac+1)(c+1)}$

上式在$q=1$且$pq=ac+1$時等號成立，故當$(a+ac+1)(c+1)$達最大值時，$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$為最大值。

$\because a+c=10$且$a\le c\ \therefore (a,c)=(1,9),(2,8),(3,7),(4,6),(5,5)$

分別計算對應的$(a+ac+1)(c+1)=110,171,200,203,186$，其中$203$為最大值，所以$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$的最大值為$1-\frac{1}{203}=\frac{202}{203}$。

二、已知a,b,c,d為正數，且滿足$abcd=1$，試證：

$$\frac{1+ab}{1+a}+\frac{1+bc}{1+b}+\frac{1+cd}{1+c}+\frac{1+da}{1+d}\geq 4$$

【參考解答】

利用$cd=\frac{1}{ab}$，$da=\frac{1}{bc}$，可得

$$\begin{aligned}A&=\frac{1+ab}{1+a}+\frac{1+bc}{1+b}+\frac{1+cd}{1+c}+\frac{1+da}{1+d}\\&=\frac{1+ab}{1+a}+\frac{1+bc}{1+b}+\frac{1+ab}{ab+abc}+\frac{1+bc}{bc+bcd}\\&=(1+ab)\left(\frac{1}{1+a}+\frac{1}{ab+abc}\right)+(1+bc)\left(\frac{1}{1+b}+\frac{1}{bc+bcd}\right)\end{aligned}$$

利用算幾不等式知$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y}$，其中$x,y$為正數，因此

$$\begin{aligned}A&\geq(1+ab)\left(\frac{4}{1+a+ab+abc}\right)+(1+bc)\left(\frac{4}{1+b+bc+bcd}\right)\\&=4\left(\frac{1+ab}{1+a+ab+abc}+\frac{1+bc}{1+b+bc+bcd}\right)\\&=4\left(\frac{1+ab}{1+a+ab+abc}+\frac{a(1+bc)}{a(1+b+bc+bcd)}\right)=4\end{aligned}$$

故得證

三、某網球隊有偶數n個選手，進行了兩輪的單循環比賽。在每輪的比賽中，每兩人都比一場，比賽結果若為和局，則兩人各得1分；若有分出勝負，則贏者得2分，敗者得0分。如果在第二輪比賽中，每個選手的得分之和都比第一輪比賽變化了不少於n分，則每個選手都剛好變化多少分？請證明你的答案。

【參考解答】

將所有運動員分為兩組：第二輪得分高於本人第一輪得分者為第一組，第二輪得分低於本人第一輪得分者為第二組。顯然，至少有一組中不少於 $n/2$ 個運動員，不妨設第一組中的人數為 $x>=n/2$ 人。假設該組成員在第二輪中的得分總和比第一輪中的得分總和多 D，則由題意知

$D>=xn$。　　　　(1)

這些分數均由該組的 x 名運動員與其餘 $n-x$ 名運動員的比賽產生（同組運動員間的比賽在兩輪中所產生的總分都是 $x(x-1)/2*2=x(x-1)$）。每一場比賽至多為第一組的得分總和增加 2 分　，所以

$D<=2x(n-x)$。　　(2)

聯立式(1)和(2)，得知 $2(n-x)>=n$，即 $x<=n/2$。結合前面假設 $x>=n/2$，即知 $x=n/2$。將此代入式(1)和(2)，又得 $D=n^2/2$，即第一組中的每個運動員在第二輪中都剛好比自己在第一輪中多得 n 分。

由於第二組中也剛好有 $n/2$ 個運動員，所以經過類似的分析，可知他們每個人在第二輪中都剛好比自己第一輪中少得 n 分。

四、對自然數n，令$a_n = \left[\frac{7^n}{8}\right]$，其中$[x]$表示不超過$x$的最大整數，若$b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$，試求$b_{2022}$除以$50$的餘數。

【參考解答】

顯然，對任意自然數 n ，$\frac{7^n}{8}$不是整數，但$a_n = \left[\frac{7^n}{8}\right]$是整數

所以對任意自然數 k

$$7^{2k-1} - 2 = \left(\frac{7^{2k-1}}{8} - 1\right) + \left(\frac{7^{2k}}{8} - 1\right)$$

$$< \left[\frac{7^{2k-1}}{8}\right] + \left[\frac{7^{2k}}{8}\right]$$

$$< \frac{7^{2k-1}}{8} + \frac{7^{2k}}{8} = 7^{2k-1}$$

故可得 $7^{2k-1} - 2 < a_{2k-1} + a_{2k} < 7^{2k-1}$

由上式可推得對任意自然數 k

$$a_{2k-1} + a_{2k} = 7^{2k-1} - 1 = 7 \times 7^{2k-2} - 1$$

$$= 7 \times 49^{k-1} - 1 = 7 \times (50-1)^{k-1} - 1$$

$$\equiv 7 \times (-1)^{k-1} - 1 \pmod{50}$$

所以 $b_{2022} = \sum_{k=1}^{2022} a_k = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2021} + a_{2022})$

$$\equiv \left(7 \times (-1)^0 - 1\right) + \left(7 \times (-1)^1 - 1\right) + \cdots + \left(7 \times (-1)^{1010} - 1\right) \pmod{50}$$

$$\equiv 7 - 1011 \pmod{50}$$

$$\equiv -1004 \pmod{50}$$

$$\equiv 46 \pmod{50}$$

故 b_{2022} 除以 50 之餘數為 46