110 學年度普通型高級中等學校數學科能力競賽試題

第 5 區(屏東高中)　筆試(一)　編號：＿＿＿＿＿＿

注意事項 ：

(1) 時間分配: 2 小時。

(2) 本試卷共4題，滿分49分。第一題12分，第二題12分，第三題12分，第四題13分。

(3) 將計算、證明過程依序寫在答案卷上。

(4) 不可使用電算器。

(5) 試題與答案一同繳回。

一、令多項式$p(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$且$d=\frac{c^2}{a^2}$，$a\neq 0$。

(1) 試求b（以a, c表示)的值使得$p(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$為二階多項式的平方。(即存在m與n使得$p(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d=(x^2+mx+n)^2$)

(2) 試求$x^4+2x^3-20x^2+6x+9$的根。

二、試證明 ：$\frac{1}{2021}<\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{2019}{2020}<\frac{1}{44}$。

三、設a與b皆為正實數，且$a+b=s$。

(1) 試求出ab的最大值(以s表示)。

(2) 若$s=2$，試求出$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)$的最小值。

(3) 若$s=2\sqrt{6}$，試求出$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)$的最小值。

四、已知 P 為三角形 $\triangle ABC$ 內部之一點，且 $\angle PAB=\angle PBC=\angle PCA=\alpha$，試證明：$\csc^2\alpha=\csc^2 A+\csc^2 B+\csc^2 C$。

(定義：$\csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}$)

110學年度普通型高級中等學校數學科能力競賽試題

第5區(屏東高中)　筆試(一)　編號：__________

注意事項 ：

本試卷共4題，滿分49分。第一題12分，第二題12分，第三題12分，第四題13分。

一、令多項式$p(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$且$d=\frac{c^2}{a^2}$，$a\neq 0$。

(1) 試求b（以a, c表示)的值使得$p(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$為二階多項式的平方。(即存在m與n使得$p(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d=(x^2+mx+n)^2$)

(2) 試求$x^4+2x^3-20x^2+6x+9$的根。

[參考解答]

(A) 令 $p(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d=(x^2+mx+n)^2$

比較係數

則$m=\frac{a}{2}, n=\frac{c}{a}$，因此 $b=\frac{a^2}{4}+\frac{2c}{a}$

(B) $x^4+2x^3-20x^2+6x+9=(x^2+x+3)^2-27x^2=(x^2+(1-3\sqrt{3})x+3)(x^2+(1+3\sqrt{3})x+3)$

可得

$$x=\frac{-1+3\sqrt{3}\pm\sqrt{16-3\sqrt{3}}}{2},\frac{-1-3\sqrt{3}\pm\sqrt{16+3\sqrt{3}}}{2}$$

二、試證明 ：$\frac{1}{2021}<\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{2019}{2020}<\frac{1}{44}$。

[參考解答]

(1) $\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{2019}{2020}>\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{5}{7}\times\ldots\times\frac{2019}{2021}>\frac{1}{2021}$

(2) $\begin{array}{c} \frac{1}{2}<\frac{2}{3} \\ \frac{3}{4}<\frac{4}{5} \\ \frac{5}{6}<\frac{6}{7} \\ \dots \\ \frac{2019}{2020}<\frac{2020}{2021} \end{array}$ 左式相乘小於右式相乘，

所以，$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\dots\times\frac{2019}{2020}<\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\dots\times\frac{2020}{2021}=\frac{2\times4\times6\times\dots\times2020}{1\times3\times5\times\dots\times2019}\times\frac{1}{2021}$

令 $x=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\dots\times\frac{2019}{2020}$，所以，$x<\frac{1}{x}\times\frac{1}{2021}$，$x^2<\frac{1}{2021}<\frac{1}{44^2}$，

所以，$x<\frac{1}{44}$。

三、**設a與b皆為正實數，且$a+b=s$。**

(1) 試求出ab的最大值(以s表示)。

(2) 若$s=2$，試求出$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)$的最小值。

(3) 若$s=2\sqrt{6}$，試求出$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)$的最小值。

[參考解答]

(1)利用算幾不等式，可得$ab\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{s^2}{4}$

(2)$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)=ab+\frac{1}{ab}+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=ab+\frac{1+a^2+b^2}{ab}=ab+\frac{1}{ab}+\frac{(a+b)^2-2ab}{ab}$

$$=ab+\frac{s^2+1}{ab}-2\ge2\sqrt{s^2+1}-2$$

因$ab\le\frac{s^2}{4}=1<\sqrt{s^2+1}=\sqrt{5}$，最小值出現於$ab=1$，最小值為 4。

(3) 因$ab\le\frac{s^2}{4}=6$，且$\sqrt{s^2+1}=\sqrt{25}=5$，最小值出現於$ab=5$，最小值為 8。

四、已知 P 為三角形 $\triangle ABC$ 內部之一點，且 $\angle PAB=\angle PBC=\angle PCA=\alpha$，試證明：$\csc^2\alpha=\csc^2 A+\csc^2 B+\csc^2 C$。

（定義：$\csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}$）

[參考解答]

在 $\triangle APC$ 中，由正弦定理知

$$\frac{\overline{AP}}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\angle APC}=\frac{b}{\sin(180^\circ-A)}=\frac{b}{\sin A}\quad\Rightarrow\quad \overline{AP}=\frac{b\sin\alpha}{\sin A}$$

所以 $\triangle PAB$ 面積 $=\frac{1}{2}c\overline{AP}\sin\alpha=\frac{1}{2}cb\frac{\sin^2\alpha}{\sin A}=\triangle ABC$ 面積$\cdot\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2 A}$

同理 $\triangle PBC$ 面積 $=\triangle ABC$ 面積$\cdot\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2 B}$， $\triangle PCA$ 面積 $=\triangle ABC$ 面積$\cdot\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2 C}$

上列三個式子相加可得

$\triangle ABC$ 面積 $=\triangle ABC$ 面積$\cdot\left(\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2 A}+\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2 B}+\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2 C}\right)$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}+\frac{1}{\sin^2 C}$$

$$\Rightarrow\ \csc^2\alpha=\csc^2 A+\csc^2 B+\csc^2 C$$