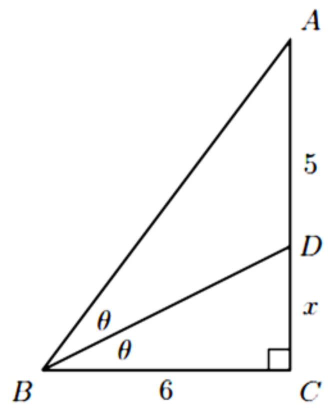
110 學年度新北市(新店高中)
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試（二）試題

編號：＿＿＿＿＿＿（學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共七題填充題，每題 3 分，滿分為 21 分。
2. 考試時間：1 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將答案填寫於對應題號欄內。

問題一：如圖，在三角形 ΔABC 中， D 為 AC 邊上的一點。已知 $\overline{BC}=6$，$\overline{AD}=5$，$\overline{CD}=x$，$\angle\mathrm{ABD}=\angle\mathrm{DBC}$，以及$\angle\mathrm{BCD}$ 為直角。則 x 之值為 ＿（一）＿ 。



問題二：已知多項式 $f(x)=x^4-5x^3+3x^2+19x-30$ 有一個複數根 $2+i$，若實數 a 滿足 $f(a)<0$，則 a 的範圍為 ＿（二）＿ 。

問題三：令 $f(n)$ 為正整數 n 的各位數和，如 $f(12345)=15$、$f(f(12345))=6$。試求 $f(f(f(123456789^{2021})))=$ ＿（三）＿ 。

<背面尚有試題>

問題四：大圓桌旁有 18 張相異的椅子，圍成正 18 邊形放置，現有 5 人入坐，因為疫情關係，必需彼此不相鄰，且任意 1/3 圓都至少有 1 位置坐人的方法有 __（四）__ 種。

問題五：求 $\sum_{k=0}^{n-1} cos^2(\alpha + \frac{2\pi}{n}k)$ = __（五）__ 。

問題六：已知複數數列 $\ll z_n \gg$ 滿足 $z_1 = 1$，$z_{n+1} = \overline{z_n} + 1 + ni$，$n = 1,2,3,\cdots$，其中 $i = \sqrt{-1}$， $\overline{z_n}$ 為 z_n 的共軛複數。

試求 $z_{2021} =$ __（六）__ 。

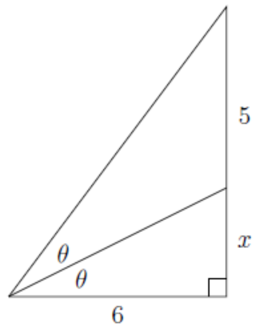
問題七：三角形 ΔABC 滿足 $cos\,A + sin\,A - \frac{2}{cos\,B + sin\,B} = 0$，

試求 $sin\,A =$ __（七）__ 。

<試題結束>

110 學年度新北市(新店高中)
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試（二）解答

問題一： 如圖，x 之值為__________？



【參考解答】

由題意知，

$$\frac{x+5}{6}=\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{\frac{x}{6}}{1-\frac{x^2}{36}}$$

化簡得到　　$x^3+5x^2+36x-180=0$

即，　　$(x-3)(x^2+8x+60)=0$

因此，$x=3$。

問題二： 已知多項式　$f(x)=x^4-5x^3+3x^2+19x-30$ 有一個複數根 $2+i$，若實數 a 滿足 $f(a)<0$，則 a 的範圍為________？

【參考解答】

實係數多項式，根必定共軛出現，所以多項式 $f(x)$ 有因式

$x^2-4x+5=(x-2)^2+1>0$　，$f(x)=(x^2-4x+5)(x^2-x-6)$

得到 $-2<a<3$　。

問題三：大圓桌旁有 18 張相異的椅子，圍成正 18 邊形放置，幾個朋友共 5 人入坐，因為疫情關係，必需彼此不相鄰，且任意 1/3 圓都要至少有 1 位置有坐人的方法有幾種_________？

【參考解答】

先解 $x+y+z+w+u=13$，滿足 $1\le x,y,z,w,u\le 5$ 的整數解有幾組?

利用排容原理得 $H^{5}_{13-5}-C^{5}_{1}H^{5}_{13-10}=C^{12}_{4}-5C^{7}_{4}=320$

因為人不同，所以再乘以 $18/5$ 即為答案 1152 種。

(若要簡單一點可以改成:12 張椅子，3 人入座，任意半圓都要有人。)

問題四：$f(n)$ 為正整數 n 的各位數和，如 $f(12345)=15$，而 $f(f(12345))=6$。試求 $f(f(f(123456789^{2021})))=$ __________？

【參考解答】

為了方便，設 $123456789^{2021}=a$。

因為 $123456789<10^{9}$，所以 a 最多 $9\times 2021=18189$ 位數，

每位最大是9，所以 $f(a)<9\times 18189=163701$，頂多是6位數。

所以 $f(f(a))<9\times 6=54$，頂多是2位數。

又 a 為 9 的倍數，所以 $f(a)$ 亦為 9 的倍數，$f(f(a))$ 有可能為 9,18,27,36,45,54，$f(f(f(a)))=9$。

問題五：求 $\sum_{k=0}^{n-1} cos^2(\alpha+\frac{2\pi}{n}k)$ = ＿＿＿＿＿＿？

【參考解答】

令

$$S=\sum_{k=0}^{n-1}\cos^2(\alpha+\frac{2\pi}{n}k)$$

首先，我們先化簡有限級數 S，利用倍/半角公式 $\cos^2\theta=\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$

可得

$$S=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\cos 2(\alpha+\frac{2\pi}{n}k)+\frac{n}{2}$$

現在我們令

$$S'=\sum_{k=0}^{n-1}\cos 2(\alpha+\frac{2\pi}{n}k)$$

在此我們利用和/分角公式

$$\cos(\alpha+k\theta)\sin\frac{\theta}{2}=\frac{\sin(\alpha+(k+\frac{1}{2})\theta)-\sin(\alpha+(k-\frac{1}{2})\theta)}{2}$$

可得

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos(\alpha+k\theta)=\frac{\sin(\alpha+(n-\frac{1}{2})\theta)-\sin(\alpha-\frac{1}{2}\theta)}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

則我們藉由 $(\alpha\leftarrow 2\alpha,\theta\leftarrow\frac{4\pi}{2})$ 可得

$$S'=0$$

則 $S=\dfrac{n}{2}$。

問題六：已知複數數列$\{z_n\}$滿足 $z_1=1$，$z_{n+1}=\overline{z_n}+1+ni$，$n=1,2,3\cdots$，其中$i=\sqrt{-1}$，$\overline{z_n}$ 為 z_n 的共軛複數。試求

$z_{2021}=$_______？

【參考解答】

$$z_{n+2}=\overline{z_{n+1}}+1+(n+1)i=\overline{\overline{z_n}+1+ni}+1+(n+1)i=z_n+2+i$$

所以

$$\begin{aligned} z_{2021}&=z_{2019}+2+i=z_{2017}+2(2+i)=\cdots=z_1+1010\cdot(2+i)\\ &=2021+1010i. \end{aligned}$$

問題七：三角形ΔABC 滿足 $\cos A+\sin A-\frac{2}{\cos B+\sin B}=0$，試求

$\sin A=$___________？

【參考解答】

由$\sqrt{2}\sin(A+\frac{\pi}{4})-\frac{\sqrt{2}}{\sin(B+\frac{\pi}{4})}=0$

得到 $\sin(A+\frac{\pi}{4})\cdot\sin(B+\frac{\pi}{4})=1$，

因為$0\leq\sin(A+\frac{\pi}{4})$、$\sin(B+\frac{\pi}{4})\leq 1$，

所以只有$A=B=\frac{\pi}{4}$滿足條件，故$\sin A=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.