110 學年度臺北市（陽明高中）
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試（一）試題

編號：_______________（學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共四題計算證明題，滿分 49 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷繳回。
4. 將作答過程填寫在答案卷內。

【問題一】 設數列 $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8$ 的每一項都是正數，且同時滿足以下八個等式：

$$a_1=\frac{1}{a_8}+\frac{1}{a_2} \qquad a_2=a_1+a_3$$

$$a_3=\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_4} \qquad a_4=a_3+a_5$$

$$a_5=\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_6} \qquad a_6=a_5+a_7$$

$$a_7=\frac{1}{a_6}+\frac{1}{a_8} \qquad a_8=a_7+a_1$$

(1) 試比較 a_2,a_4,a_6,a_8 四數的大小關係。 (6 分)

(2) 試找出所有可能的數列 $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8$。 (6 分)

【問題二】 設正整數 m 及質數 p 滿足 $16p^2(51-2m)=m^2(51+2m)$。

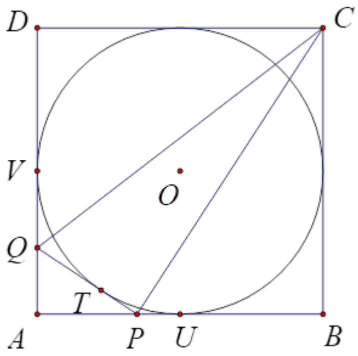
(1) 試說明 m 必為 4 的倍數。 (4 分)

(2) 試找出所有可能的數對 (m,p)。 (8 分)

<背面尚有試題>

【問題三】如圖，$ABCD$ 是邊長為 6 的正方形，其內切圓 O 分別切 $\overline{AB}$、$\overline{AD}$ 於 U,V 兩點，且 $\overline{PQ}$ 與圓 O 相切，其中點 P 在 $\overline{AU}$ 上，點 Q 在 $\overline{AV}$ 上。

試證：ΔCPQ 的面積為定值，並求此定值。 (12 分)



【問題四】設正整數 $n \geq k \geq 3$。對 $X = \{1,2,3,\cdots,n\}$ 中恰含 k 個元素的子集 A，令 $f(A)$ 表示 A 中 3 個連續整數組 $(i,i+1,i+2)$ 的組數；例如：

對 $n=9$ 及 $k=7$，在 $A=\{1,2,3,5,6,7,8\}$ 中，出現 3 個連續整數的組數恰有 3 組：$(1,2,3),(5,6,7),(6,7,8)$，此時 $f(A)=3$。

設 X 中所有 k 個元素的子集 A 之 $f(A)$ 值的總和以 $S_n(k)$ 表示。

(1) 對 $n=9$ 及 $k=4$，試求 $S_9(4)$ 之值。 (5 分)

(2) 對任意正整數 $n \geq k \geq 3$，試求 $S_n(k)$ 的一般式。 (8 分)

<試題結束>

110 學年度臺北市（陽明高中）

普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

數學科筆試（一）解答

【問題一】 設數列 $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8$ 的每一項都是正數，且同時滿足以下八個等式：

$$a_1=\frac{1}{a_8}+\frac{1}{a_2} \qquad a_2=a_1+a_3$$

$$a_3=\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_4} \qquad a_4=a_3+a_5$$

$$a_5=\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_6} \qquad a_6=a_5+a_7$$

$$a_7=\frac{1}{a_6}+\frac{1}{a_8} \qquad a_8=a_7+a_1$$

(1) 試比較 a_2,a_4,a_6,a_8 四數的大小關係。 (6 分)

(2) 試找出所有可能的數列 $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8$。 (6 分)

【解】(1) 欲證 a_2,a_4,a_6,a_8 四數相等。

假設 $a_2\neq a_4$，依對稱性可設 $a_2<a_4$，即 $a_1+a_3<a_3+a_5$，故 $a_1<a_5$。

又 $\frac{1}{a_2}>\frac{1}{a_4}$ 且 $\frac{1}{a_8}+\frac{1}{a_2}=a_1<a_5=\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_6}$，可得 $\frac{1}{a_8}<\frac{1}{a_6}$，即 $a_6<a_8$。

由此得知 $a_5+a_7=a_6<a_8=a_7+a_1$，即 $a_5<a_1$，矛盾！故 $a_2=a_4$。

同理，$a_4=a_6$ 且 $a_6=a_8$，所以，$a_2=a_4=a_6=a_8$。

(2)令 $a_2=a_4=a_6=a_8=k>0$，則 $a_1=a_3=a_5=a_7=\frac{2}{k}$；因此，可得

$$k=a_2=a_1+a_3=\frac{4}{k}\text{。}$$

解得 $k=2$，故滿足條件的數列只有一種，即 $(1,2,1,2,1,2,1,2)$。

【另解】 由所給的 $2n$ 個方程式（本題為 $n=4$ 的特例），可得：

$$a_4=a_3+a_5=\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_6}=\frac{1}{a_2}+\frac{2}{a_4}+\frac{1}{a_6}$$

$$a_6=a_5+a_7=\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_6}+\frac{1}{a_6}+\frac{1}{a_8}=\frac{1}{a_4}+\frac{2}{a_6}+\frac{1}{a_8}$$

$$\vdots$$

$$a_{2n}=a_{2n-1}+a_1=\frac{1}{a_{2n-2}}+\frac{1}{a_{2n}}+\frac{1}{a_{2n}}+\frac{1}{a_2}=\frac{1}{a_{2n-2}}+\frac{2}{a_{2n}}+\frac{1}{a_2}$$

若記 $a_{2n+2}=a_2$，則 $a_{2k}=\frac{1}{a_{2k-2}}+\frac{2}{a_{2k}}+\frac{1}{a_{2k+2}},\ \forall\ \ k=1,2,3,\cdots,n$。

設 $m=\min\limits_{1\le k\le n}a_{2k}$，$M=\max\limits_{1\le k\le n}a_{2k}$，並設當 $k=i$ 時，$a_{2i}=m$，且當 $k=j$ 時，

$a_{2j}=M$，則

$$m=\frac{2}{m}+\frac{1}{a_{2i-2}}+\frac{1}{a_{2i+2}}\ge\frac{2}{m}+\frac{1}{M}+\frac{1}{M}=\frac{2}{m}+\frac{2}{M}\ ,$$

$$M=\frac{2}{M}+\frac{1}{a_{2j-2}}+\frac{1}{a_{2j+2}}\le\frac{2}{M}+\frac{1}{m}+\frac{1}{m}=\frac{2}{M}+\frac{2}{m}\ 。$$

由此可得 $m\ge M$，因此，對所有的 $k=1,2,3,\cdots,n$，a_{2k} 均相等。

令 $a_{2k}=a$，$\forall\ k=1,2,\cdots,n$，則 $a=\frac{2}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}=\frac{4}{a}$。因為 $a>0$，所

以，

$a=2$，即 $a_{2k}=2$，$\forall\ k=1,2,\cdots,n$，因而 $a_{2k-1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$，$\forall\ k=1,2,\cdots,n$。

【問題二】 設正整數 m 及質數 p 滿足 $16p^2(51-2m)=m^2(51+2m)$。

(1) 試說明 m 必為 4 的倍數。 (4 分)

(2) 試找出所有可能的數對 (m,p)。 (8 分)

【解】 (1) 因為 16 是 $m^2(51+2m)$ 的因數，且 16 與 $51+2m$ 互質，故 16 是 m^2 的因數。因此，m 必為 4 的倍數。

(2) 由(1)可令 $m=4k$，原式可化為 $\frac{p^2}{k^2}=\frac{51+8k}{51-8k}>1$，得知 $1\le k<p$。又 p 為

質數，可知 p 與 k 互質。令 d 為 $51-8k$ 與 $51+8k$ 的最大公因數，則

$\begin{cases}51-8k=dk^2\\51+8k=dp^2\end{cases}$。因此，$16k=d(p^2-k^2)$。$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$

若 $p=2$，則 $k=1$，此時，$16=3d$，不合。

若 $p>2$，則由(*)式得知 $k\mid dp^2$；又 p 與 k 互質，得到 $k\mid d$。

可設 $d=k\ell$，代入(*)式並化簡，得 $16=\ell(p+k)(p-k)$。因此，$p+k=4,8,16$。

(i)當 $p+k=4$ 時，$p=3,k=1,\ell=2,d=2$，矛盾(與 $51k+8k=dp^2$ 不合)。

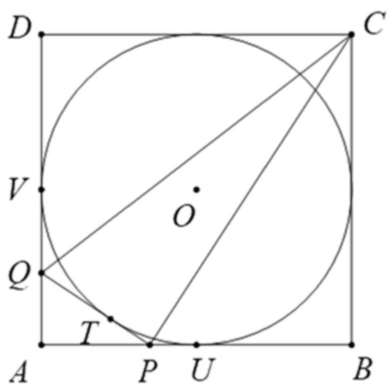
(ii)當 $p+k=8$ 時，$p=5,k=3$（合），或 $p=7,k=1$(與 $51k+8k=dp^2$ 不合)。此情況下，$\ell=1,d=3$，而 $m=4k=12$。

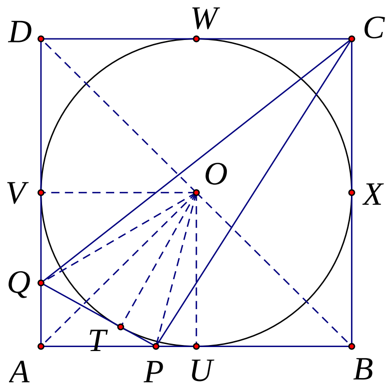
(iii)當 $p+k=16$ 時，$p-k=1$，得 $p=\dfrac{17}{2}$（不合）。

因此，僅有唯一的一組解，即數對 $(m,p)=(12,5)$。

【問題三】 如圖，$ABCD$ 是邊長為 6 的正方形，其內切圓 O 分別切 $\overline{AB}$、$\overline{AD}$ 於 U,V 兩點，且 $\overline{PQ}$ 與圓 O 相切，其中點 P 在 $\overline{AU}$ 上，點 Q 在 $\overline{AV}$ 上。

試證：ΔCPQ 的面積為定值，並求此定值。 (12 分)





【解】 設圓 O 分別切 $\overline{DC}$、$\overline{CB}$ 於 W、X 兩點。顯然，圓 O 的半徑為 3，且

$\overline{AU}=\overline{AV}=\overline{BU}=\overline{BX}=\overline{DV}=\overline{DX}=\overline{CX}=\overline{CW}=3$，

令 $\overline{PT}=\overline{PU}=p$、$\overline{QT}=\overline{QV}=q$。由此可知

$\Delta APQ=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{AP}\cdot\overline{AQ}=\dfrac{1}{2}(3-p)(3-q)$，$\Delta BCP=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{BP}\cdot\overline{BC}=\dfrac{1}{2}\cdot(3+p)\cdot 6$，

$\Delta CDQ=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{DQ}\cdot\overline{CD}=\dfrac{1}{2}\cdot(3+q)\cdot 6$。

由此可得

$$\begin{aligned}\Delta CPQ&=ABCD-\Delta APQ-\Delta BCP-\Delta CDQ\\&=36-\frac{1}{2}(9-3p-3q+pq+18+6p+18+6q)\\&=36-\frac{1}{2}(45+3p+3q+pq)=\frac{1}{2}(27-3p-3q-pq).\end{aligned}$$

利用畢氏定理，$\overline{PQ}^2=\overline{AP}^2+\overline{AQ}^2$，即 $(p+q)^2=(3-p)^2+(3-q)^2$，化簡可得到 $3p+3q+pq=9$。亦可設 $\angle TOP=\angle UOP=x$，$\angle TOQ=\angle VOQ=y$，則可推得 $\angle UOV=2x+2y=\dfrac{\pi}{2}$，所以，$x+y=\dfrac{\pi}{4}$；因此，

$$1=\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}=\frac{\dfrac{p}{3}+\dfrac{q}{3}}{1-\dfrac{p}{3}\dfrac{q}{3}}=\frac{3(p+q)}{9-pq},$$

即 $3p+3q+pq=9$。故 $\Delta CPQ=\dfrac{1}{2}(27-3p-3q-pq)=\dfrac{1}{2}(27-9)=9$。

【問題四】 設正整數 $n\ge k\ge 3$。對 $X=\{1,2,3,\cdots,n\}$ 中恰含 k 個元素的子集 A，令 $f(A)$ 表示 A 中 3 個連續整數組 $(i,i+1,i+2)$ 的組數；例如：對 $n=9$ 及 $k=7$，在 $A=\{1,2,3,5,6,7,8\}$ 中，出現 3 個連續整數的組數恰有 3 組：$(1,2,3),(5,6,7),(6,7,8)$，此時 $f(A)=3$。設 X 中所有 k 個元素的子集 A 之 $f(A)$ 值的總和以 $S_n(k)$ 表示。

(1) 對 $n=9$ 及 $k=4$，試求 $S_9(4)$ 之值。(5 分)

(2) 對任意正整數 $n\ge k\ge 3$，試求 $S_n(k)$ 的一般式。(8 分)

【解】 (1) A 中含 3 個連續整數組的情況僅有以下兩類：

(a) 恰含 1 組連續 3 整數的子集 A：共 $5\times 2+4\times 5=30$ 種。

$\{1,2,3,5\},\{1,2,3,6\},\{1,2,3,7\},\{1,2,3,8\},\{1,2,3,9\}$

$\{2,3,4,6\},\{2,3,4,7\},\{2,3,4,8\},\{2,3,4,9\}$

$\{3,4,5,1\},\{3,4,5,7\},\{3,4,5,8\},\{3,4,5,9\}$

$\{4,5,6,1\},\{4,5,6,2\},\{4,5,6,8\},\{4,5,6,9\}$

$\{5,6,7,1\},\{5,6,7,2\},\{5,6,7,3\},\{5,6,7,9\}$

$\{6,7,8,1\},\{6,7,8,2\},\{6,7,8,3\},\{6,7,8,4\}$

$\{7,8,9,1\},\{7,8,9,2\},\{7,8,9,3\},\{7,8,9,4\},\{7,8,9,5\}$

(b) 恰含 2 組連續 3 整數的子集 A：共 6 種。

$\{1,2,3,4\},\{2,3,4,5\},\{3,4,5,6\},\{4,5,6,7\},\{5,6,7,8\},\{6,7,8,9\}$

因此，$S_9(4)=30\times 1+6\times 2=42$。

(2) 對 $i=1,2,3,\cdots,n-2$，定義 $g_i(A)=\begin{cases}1, & \text{若 } i,i+1,i+2\in A\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$。則可得知：

$f(A)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n-2}g_i(A)$，且對每一個 $i=1,2,3,\cdots,n-2$，$\displaystyle\sum_{|A|=k}g_i(A)=C_{k-3}^{n-3}$，這是因為 A 中除了 $i,i+1,i+2$ 這三數外，還要從其餘的 $n-3$ 個數選取 $k-3$ 個數。因此，

$$S_n(k)=\sum_{|A|=k}f(A)=\sum_{|A|=k}\sum_{i=1}^{n-2}g_i(A)=\sum_{i=1}^{n-2}\sum_{|A|=k}g_i(A)=\sum_{i=1}^{n-2}C_{k-3}^{n-3}=(n-2)C_{k-3}^{n-3}\text{。}$$