110 學年度北一區（花蓮高中）
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試（一）試題

編號：________________（學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共四題計算證明題，滿分為 46 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算過程依序填寫在答案卷內。

問題一： 已知 a,b 為正整數，a^2+b^2 除以 $a+b$ 的商為 q，餘數為 r，求所有滿足 $q^2+r=2021$ 的數對 (a,b)。

(12 分)

問題二： 設 a,b,c,A,B,C 為實數，且 $a\neq 0, A\neq 0$。假設對所有的實數 x，不等式

$$\left|ax^2+bx+c\right|\leq\left|Ax^2+Bx+C\right|$$

恆成立，試証明

$$\left|b^2-4ac\right|\leq\left|B^2-4AC\right|。$$

(12 分)

《背面尚有試題》

問題三： 已知$|z|=1$（z為複數），求$|z^3-z+2|$的最大值。

(10 分)

問題四： (1)設 $p(x)$ 為一個整係數多項式。若 m 為 $p(x)$ 的一個整數根，則 $p(x)+2$（或 $p(x)-2$）的整數根只有可能為 $m\pm1$ 或 $m\pm2$。 (4 分)

(2)設 $p(x)$ 為一個 n 次的整係數多項式。試証明 $p(x)\left(p(x)+2\right)$ 最多只有 $n+2$ 個整數根。 (8 分)

《試題結束》

110 學年度北一區（花蓮高中）
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試（一）解答

問題一： 已知a,b為正整數，a^2+b^2除以$a+b$的商為q，餘數為r，求所有滿足

$q^2+r=2021$的數對(a,b)。 (12 分)

【解】

按題意，我們有

(1) $a^2+b^2=q(a+b)+r,\ 0\le r\le a+b$

(2) $q^2+r=2021$

(3) $q^2\le 2021<q^2+a+b$（由(1),(2)）

(4) $a^2+b^2<(q+1)(a+b)\ldots$（由(1)）

由(4)，by $a^2+b^2\ge 2ab$，得$2ab<(q+1)(a+b)$.

因此，$(a+b)^2<2(q+1)(a+b)$

$\Rightarrow a+b<2(q+1)$

$\Rightarrow a+b\le 2q+1.$

由(3)，$q^2\le 2021<(q+1)^2$.

Check $44^2=1936, 45^2=2025\Rightarrow q=44.$

$\mathrm{r}=2021-q^2=85.$

代入(1)，$a^2+b^2=44(a+b)+85$

$\Rightarrow (a-22)^2+(b-22)^2=1053$

檢查：$1053=18^2+27^2$.（唯一的兩平方和表示）

i.e. $(|a-22|,|b-22|)=(18,27)$ or $(27,18)$.

得(a,b)可能為(4,49), (49,4), (40,49), (49,40)

$a+b=53<r$

（不合）

Ans: $(a,b)=(40,49)$ or $(49,40)$

問題二： 設 a,b,c,A,B,C 為實數，且 $a\neq 0, A\neq 0$。假設對所有的實數 x，不等式

$$\left|ax^2+bx+c\right|\leq\left|Ax^2+Bx+C\right|$$

恆成立，試証明

$$\left|b^2-4ac\right|\leq\left|B^2-4AC\right|。$$

(12 分)

【證明】

首先代入大的x值$\Rightarrow |A|\geq|a|$.

Case(1): $B^2-4AC>0$

則Ax^2+Bx+C有兩個相異實根α_1, α_2

由$|ax^2+bx+c|\leq|Ax^2+Bx+C|$，知$\alpha_1$, α_2亦為ax^2+bx+c的根。

$\therefore b^2-4ac>0.$

$B^2-4AC=A^2(\alpha_1-\alpha_2)^2$

$\geq a^2(\alpha_1-\alpha_2)^2=b^2-4ac$（根與係數的關係）

Case(2): $B^2-4AC\leq 0$且$b^2-4ac\leq 0$

不失一般性可假設$A\geq a>0$且$B=0$（變數x取代為$x+$常數）

$Ax^2+Bx+C\geq ax^2+bx+c\geq 0$ for all x.

$\therefore C\geq c\geq 0.$

$4AC-B^2=4AC\geq 4ac\geq 4ac-b^2.$

Case(3): $B^2-4AC\leq 0$且$b^2-4ac>0.$

$y=Ax^2+Bx+C$的圖形不超過x軸，則$y=(Ax^2+Bx+C)\pm(ax^2+bx+c)$的圖形也不超過$x$軸。

$$\therefore \left.\begin{array}{l}(B-b)^2-4(A-a)(C-c)\le 0\\(B+b)^2-4(A+a)(C+c)\le 0\end{array}\right\}$$相加得$2(B^2-4ac)+2(b^2-4ac)\le 0$

$$\therefore b^2-4ac\le 4\mathrm{AC}-B^2.$$

問題三： 已知$|z|=1$（z為複數），求$|z^3-z+2|$的最大值。

(10 分)

【解】

設$z=\cos\theta+i\sin\theta,\ 0\le\theta<2\pi.$

設$f(z)=|z^3-z+2|=|(\cos\theta+i\sin\theta)^3-(\cos\theta+i\sin\theta)+2|$

$$=\sqrt{(\cos 3\theta-\cos\theta+2)^2+(\sin 3\theta-\sin\theta)^2}$$

$$=\sqrt{6+4\cos 3\theta-2\cos 2\theta-4\cos\theta}$$ ←中間用和角公式

令$t=\cos\theta.$

則$f(z)=\sqrt{6+4(4t^3-3t)-2(2t^2-1)-4t}$

$$=2\sqrt{4t^3-t^2-4t+2}$$

$$=2\sqrt{(2t+1)^2\left(t-\frac{5}{4}\right)+\frac{13}{4}}$$

$\because t-\frac{5}{4}<0$ $\therefore$當$\mathrm{t}=\frac{-1}{2}$時$f(z)$得最大值$2\sqrt{\frac{13}{4}}=\sqrt{13}$

Ans: $\sqrt{13}$

問題四：(1)設 $p(x)$ 為一個整係數多項式。若 m 為 $p(x)$ 的一個整數根，則 $p(x)+2$（或 $p(x)-2$）的整數根只有可能為 $m\pm1$ 或 $m\pm2$。 (4 分)

(2)設 $p(x)$ 為一個 n 次的整係數多項式。試証明 $p(x)\big(p(x)+2\big)$ 最多只有 $n+2$ 個整數根。 (8 分)

【證明】

(1) Say $p(x)=(x-m)q(x)$，其中$q(x)$為整係數多項式。

若l為$p(x)\pm2$的整數根，則$0=p(l)\pm2=(l-m)q(l)\pm2$.

因此$l-m|2 \Rightarrow l-m=\pm1$ or $l-m=\pm2$

Hence $l=m\pm1$ or $l=\mathrm{m}\pm2$.

(2) 如果$p(x)(p(x)+2)$沒有整數根，敘述明顯成立。

設m為$p(x)(p(x)+2)$的最小整數根

①若m為$p(x)$的整數根，由引理知$p(x)+2$的整數根只有可能是$m+1,\ m+2$。所以$p(x)(p(x)+2)$最多只有$n+2$個整數根。

②若m為$p(x)+2$的整數根，把引理用到$p(x)+2$，則$p(x)$的整數根只有可能是$m+1,\ m+2$。所以$p(x)(p(x)+2)$最多只有$n+2$個整數根。