110學年度高級中學數學學科能力競賽

中投區複賽試題（二）

（時間一小時）

注意事項：

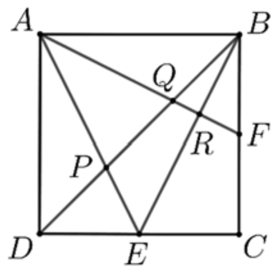
1. 本試卷共七題**填充題**，每題 3 分，滿分為 21 分。
2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

一、設 $0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$，求 $\sin^3\theta\cos\theta$ 的最大值。

二、某國家的紙鈔面額有 1 元、5 元、10 元和 50 元等 4 種，將它們湊成 100 元的方式有幾種？

三、若正整數 n 滿足 $10^{10}\le C_0^n+2C_1^n+2^2C_2^n+\cdots+2^nC_n^n\le 3\cdot 10^{10}$，則 n 之值為何？（$\log 3=0.4771$）

四、設 $ABCD$ 為單位正方形，E, F 分別為 $\overline{CD}, \overline{BC}$ 的中點，$\overline{AE}$ 交對角線 $\overline{BD}$ 於 P，$\overline{AF}$ 分別交 $\overline{BD}, \overline{BE}$ 於點 Q, R，試求四邊形 $PQRE$ 的面積。



五、設 x 為非負實數，若非負整數 n 滿足 $n-\dfrac{1}{2}\le x<n+\dfrac{1}{2}$，則定義 $r(x)=n$，此即實數 x 四捨五入到個位數之後的結果。求滿足方程式 $r(x^2)-2r(x)-3=0$ 的所有非負實數 x.

六、化簡 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k C_k^n}{(k+2)(k+3)(k+4)}$.

七、設 n 為正整數，令 $E(n)$ 表示 $(x+y)^n$ 的展開式中偶係數的個數，

例如：因為 $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$，所以 $E(2)=1$.

求 $E(1)+E(2)+\cdots+E(31)$ 的和。

110 學年度高級中學數學學科能力競賽

中投區複賽試題（二）解答

一、【解】

由算幾不等式

$$\frac{1}{4}=\frac{\frac{1}{3}\sin^2\theta+\frac{1}{3}\sin^2\theta+\frac{1}{3}\sin^2\theta+\cos^2\theta}{4}\geq\sqrt[4]{\left(\frac{1}{3}\sin^2\theta\right)^3\cos^2\theta}$$

可得$\sin^3\theta coc\theta\leq\frac{\sqrt[3]{3}}{16}$，其中等號成立於$\frac{1}{3}\sin\theta=\cos^2\theta$，即$\theta=\frac{\pi}{3}$

二、【解】

設 1 元、5 元、10 元和 50 元各有$a,b.c,d$張，於是

$a+5b+10c+50d=100$. 不妨設$\begin{cases}10C+50d=10x\cdots(1)\\ a+5b=100-10x\cdots(2)\end{cases}$

其中$x=0,1,2,\cdots,10$

給定x, (1)式的解(c,d)恰有$\left[\frac{x}{5}\right]+1$組

而(2)式的解(a,b)恰有$21-2x$組

因此$(a,b,c,d,)$解的組數為$\sum_{x=0}^{10}(21-2x)\left(\left[\frac{x}{5}\right]+1\right)$

$=(21+19+17+15+13)\cdot1+(11+9+7+5+3)\cdot2+1\cdot3=158$

三、【解】

$C_0^n+2C_1^n+2^2C_2^n+\cdots+2^nC_n^n=(1+2)^n=3^n$，得$10^{10}\leq3^n\leq3\cdot10^{10}$

因此：$10\leq n\log3\leq\log(3\cdot10^{10})=10+\log3$ 或$\frac{10}{\log3}\leq n\leq\frac{10}{\log3}+1$

或$\frac{10}{0.4771}\leq n\leq\frac{10}{0.4771}+1$ ， 所以$n=21$ 。

四、【解】

$$P:\begin{Bmatrix} x=y \\ y=-2x+1 \end{Bmatrix} \quad P\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right) \quad Q\begin{Bmatrix} x=y \\ y=-\frac{1}{2}\times+1 \end{Bmatrix} \quad Q\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$$

$$R\begin{Bmatrix} y=2x-1 \\ y=-\frac{1}{2}\times 1 \end{Bmatrix} \quad R\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right) \qquad \frac{1}{2} \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{5} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{3}{5} & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \quad =\frac{2}{15}$$

五、【解】

設 $(x)=n \Leftrightarrow n-0.5 \le x < n+0.5$

若 $x<\sqrt{0.5}$, 則 $(x^2)=0$, 此時$(x^2)-2(x)-3<0$,不可能有解。

若 $x \ge \sqrt{0.5}$, 則 $(x^2)\ge 1$且$(x)\ge 1$,

此時 $(n-0.5)^2 \le x^2 < (n+0.5)^2$ (1)

由題目給的條件

$(x^2)-2(x)-3=0 \Rightarrow (x^2)=2n+3$

$\Leftrightarrow 2n+2.5 \le x^2 < 2n+3.5$ (2)

由(1)跟(2)，$(n\text{-}0.5)^2 \le 2n+3.5$

$\Rightarrow n^2-3n-3.75 \le 0$ (3)

且 $2n+2.5 \le (n+0.5)^2$

$\Rightarrow n^2-n-2.25 \ge 0$ (4)

由(3)、(4) $\Rightarrow n=3 \Rightarrow 2.5 \le x < 3.5$ (5)

由(2)，$8.5 \le x^2 < 9.5$ (6)

故此方程的非負解為 $\sqrt{8.5} \le x < \sqrt{9.5}$ 。

六、【解】

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\left(k+2\right)(k+3)(k+4)}\left(C_k^n\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{1}{(k+2)(k+3)(k+4)} \times \frac{n!}{(n-k)!k!} \times \frac{(n+1)\times\ldots\times(n+4)}{(k+1)\times\ldots\times(k+4)} \times \frac{(k+1)\times\ldots\times(k+4)}{(n+1)\times\ldots\times(n+4)}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{(k+1)}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}\binom{n+4}{k+4}$$

$$=\sum_{k=4}^{n+4}(-1)^k \frac{(k-3)}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}\binom{n+4}{k}$$

$$\sum_{k=0}^{n+4}(-1)^k(k-3)\binom{n+4}{k}=\sum_{k=0}^{n+4}(-1)^k k\binom{n+4}{k}-3\sum_{k=0}^{n+4}(-1)^k\binom{n+4}{k}$$

$$k\sum_{k=1}^{n+4}(-1)^k\binom{n+4}{k}-3(1-1)^{n+4}=\sum_{k=1}^{n+4}(-1)^k\frac{(n+3)!(n+4)}{(k-1)!(n+4-k)!}$$

$$=-(n+4)\sum_{k=1}^{n+4}(-1)^{k-1}\binom{n+3}{k-1}=-(n+4)\sum_{k'=0}^{n+3}(-1)^{k'}\binom{n+3}{k'}=-(n+4)(1-1)^{n+3}=0$$

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}\sum_{k=4}^{n+4}(-1)^k(k-3)\binom{n+4}{k}$$

$$=\frac{-1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}\sum_{k=0}^{3}(-1)^k(k-3)\binom{n+4}{k}$$

$$=\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}\left[3-2\frac{(n+4)!}{(n+3)!1!}+\frac{(n+4)!}{(n+2)!2!}\right]$$

$$=\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}\left[3-2(n+4)+\frac{(n+3)(n+4)}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}\times\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\frac{1}{2(n+3)(n+4)}$$

七、【解】

令 $o(n)$ 表 $(x+y)^n$ 展開係數為基奇數的數目，則

$$\big(\mathrm{O}(0)+\mathrm{O}(1)+\ldots+\mathrm{O}(31)\big)+\big(\mathrm{E}(0)+\mathrm{E}(1)+\ldots+\mathrm{E}(31)\big)=1+2+\ldots+32=528$$

將巴斯卡三角形中的偶數換成 0，奇數換成 1

則最上面兩列的和是 $O(0)+O1)=3$

最上面四列的和正好重覆 3 次，因此 $O(0)+O(1)+O(2)+O(3)3\times 3=3^2$

最上面八列的和正好重覆前四列 3 次，因此 $O(0)+O(1)+\ldots O(7)=3\times 3^2=3^3$

同理可得 $O(0)+O(1)+\ldots O(31)=3^5$

因此，$\mathrm{E}(0)+\mathrm{E}(1)+\ldots+\mathrm{E}(31)=528-3^5=285$ 。