109 學年度高雄市高級中學數學科能力競賽試題（二）參考解答

注意事項：(1)作答時間：1 小時。不可使用電算器。

(2)本試卷共四題，滿分 21 分。每題配分標於題末。請將計算及證明題演算過程或理由，依序寫在 答案卷 上。

(3)試題紙與答案卷請一併繳回。

(4)需使用黑色或藍色筆作答

1.已知 a, b, c 三數滿足 $a+b+c-3=0$ 且 $\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b-5}+\frac{1}{c+9}=0$，其中

$a \neq -2, b \neq 5, c \neq -9$，試求$\sqrt{(a+2)^2+(b-5)^2+(c+9)^2}$ 之值。（4 分）

【參考解答】： Ans: 9

令 $x=a+2,\ y=b-5,\ z=c+9$

所以 $x+y+z=9$ 且 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$

故 $xy+yz+zx=0$

所以

$\sqrt{(a+2)^2+(b-5)^2+(c+9)^2}$

$=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$=\sqrt{(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)}$

$=9$

2. 已知 x, y, z 是正數且滿足$\begin{cases} 2x+2y+xy=18 \\ 2y+2z+yz=20 \\ 2x+2z+xz=29 \end{cases}$，試求 $x+y+z+xyz$ 之值。

(4 分)

【參考解答】Ans: 37.5

將 $2x+2y+xy=18$ 的兩邊同時加 4 得

$22=2x+2y+xy+4=(x+2)(y+2)$，

同理可得$24=2y+2z+yz+4=(y+2)(z+2)$。

還可得 $33=2z+2x+xz+4=(x+2)(z+2)$，則$(x+2)^2=\frac{121}{4}$；因為 x 是正數，所以$(x+2)=\frac{11}{2}$，$x=\frac{7}{2}$。$(y+2)=4$，$y=2$。$(z+2)=6$，$z=4$。

所以$x+y+z+xyz=37.5$

3. **$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=\overline{AC}$，且 D、E、F 三點分別在 $\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$ 三邊上，使得 $\overline{DE}\,//\,\overline{AB}$。如果 $\triangle BDF$ 之面積為 9，$\triangle AFE$ 之面積為 15，$\triangle DCE$ 之面積為 32，試求 $\triangle DEF$ 與 $\triangle ABC$ 面積之比值。（4 分）**

【參考解答】Ans: $\frac{2}{9}$。

設 DEF 面積為 x，

$\because \overline{AB}//\overline{DE} \quad \therefore \overline{AB}:\overline{DE}=\Delta BFD+\Delta AFE:\Delta DFE=(9+15):x=24:x$

且 $\Delta BDE=\Delta FDE \quad \Rightarrow \Delta BDE:\Delta DEC=\overline{BD}:\overline{DC}=(24-x):x$

$\Rightarrow x:32=(24-x):x \Rightarrow x^2+32x-768=0 \Rightarrow x=16$

因此 △DEF 與△ABC 面積比值=$\frac{16}{72}=\frac{2}{9}$。

4. ΔABC **中，**$\angle ABC=75^\circ,\angle BCA=45^\circ$**，如果** P **為** $\overline{BC}$ **上的點使得** $\overline{BP}=2\overline{PC}$**，試求**$\angle APB$**的度數。（4 分）**

【參考解答】：Ans: 60°。

設 $\overline{BC}=a,\overline{AC}=b,\overline{AB}=c,$**利用正弦定理，**$\Delta ABC$ **中，**

$\frac{a}{\sin 60^\circ}=\frac{c}{\sin 45^\circ}\Rightarrow \frac{c}{a}=\sqrt{\frac{2}{3}}$，

$\because \overline{BP}=\frac{2}{3}a,\quad \therefore \frac{\overline{BP}}{c}=\frac{2}{3}\cdot\frac{a}{c}=\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{c}{a},\quad \therefore \Delta BPA\sim\Delta BAC$

故 $\angle APB=\angle BAC=60^\circ.$

5. **已知**a,b**均為四位數，滿足**$b=3a$**且**a,b**均由相同的數字組成(順序排列除外)，試求滿足這樣條件之最小的**a**值。(首位數字均不為零)(5 分)**

【參考解答】：$\because 3\,|\,N$，

$\therefore N$ 的數字和可被 3 整除，

$\Rightarrow M$ 的數字和亦可被 3 整除，

$\Rightarrow\ 3|M$ ，

因此$9|N$

$\Rightarrow$ ***N*** **的數字和可被 9 整除，**

$\Rightarrow$ ***M*** **的數字和亦可被 9 整除，**

$\Rightarrow\ 9|M$ ，(**因此**$27|N$)

∵四位數中 9 的倍數最小為 1008，

$1008\cdot 3=3024,\ \ 1017\cdot 3=3051,\ \ 1026\cdot 3=3078,\ \ 1035\cdot 3=3105$

所以， $N=3105,\ \ M=1035$ 。