109 學年度高雄市高級中學數學科能力競賽試題（一）參考解答

注意事項：(1) 作答時間：2 小時。不可使用電算器。

(2) 本試卷共五題，滿分 49 分。每題配分標於題末。計算、證明題請務必依序寫在 答案卷 上。同時必須寫出 演算過程 或 理由。

(3) 試題紙與答案卷請一併繳回。

(4) 需使用黑色或藍色筆作答

1.試求 $\frac{1}{2}\left\{\left(\sin 15^\circ+\sqrt{(\sin 15^\circ)^2-1}\right)^{2020}+\left(\sin 15^\circ-\sqrt{(\sin 15^\circ)^2-1}\right)^{2020}\right\}$

之值。 **(9 分)**

【參考解答】：Ans: $\frac{1}{2}$

首先，我們要利用關係式 $\sin^2\theta-1=-\cos^2\theta$

接著我們證明對於 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 和任意自然數 k，則恆有

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\sin\theta+\sqrt{\sin^2\theta-1}\right)^{2k}+\left(\sin\theta-\sqrt{\sin^2\theta-1}\right)^{2k}\right\}=(-1)^k\cos 2k\theta$$

事實上，

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\sin\theta+\sqrt{\sin^2\theta-1}\right)^{2k}+\left(\sin\theta-\sqrt{\sin^2\theta-1}\right)^{2k}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{[i(\cos\theta-i\sin\theta)]^{2k}+[-i(\cos\theta+i\sin\theta)]^{2k}\right\}$$

$$=\frac{i^{2k}}{2}\left\{(\cos\theta-i\sin\theta)^{2k}+(\cos\theta+i\sin\theta)^{2k}\right\}$$

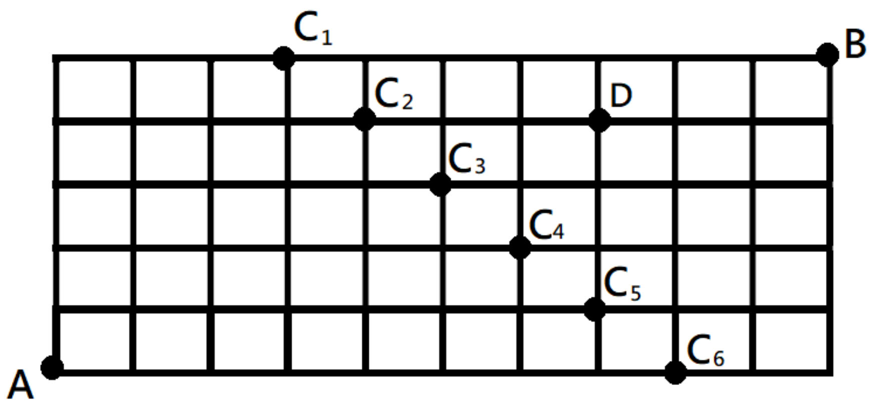
$$=\frac{(-1)^k}{2}\{\cos 2k\theta-i\sin 2k\theta+\cos 2k\theta+i\sin 2k\theta\}=(-1)^k\cos 2k\theta$$

令 $\theta=15^\circ$ 和 $k=1010$

所以 $2k\theta=30300^\circ=84\times 360^\circ+60^\circ$

故原式$=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$

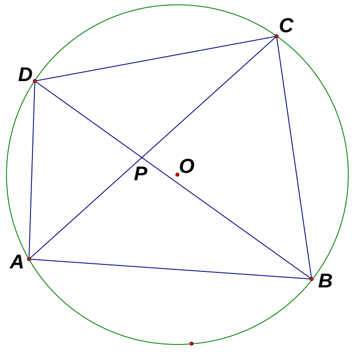
2.一隻螞蟻從一個長為 10 單位，寬為 5 單位的方格陣中之左下角 A 出發，要爬向右上角的巢穴 B，如圖所示。若螞蟻只能沿著格線向右或是向上移動，且在C_1點位置至C_6點這 6 個位置上，各有一粒砂糖，而 D 點的位置是個小水坑。如果螞蟻是搬運砂糖路過水坑，砂糖就會被溶掉，請問螞蟻搬運哪一粒砂糖回巢時可以選擇的安全路徑為最多?有幾種選擇?　　　　　　　　　　(10 分)



【參考解答】Ans:選擇徑 $A-C_4-B$ ，共有 644 種。

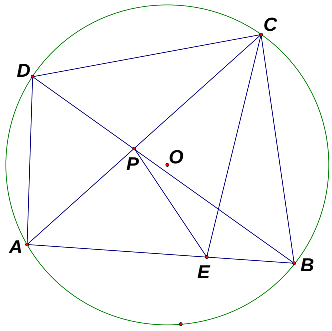
1. $A-C_1-B$：$\binom{8}{3}=56$
2. $A-C_2-B$：$\binom{8}{4}\binom{7}{6}=490$，$A-C_2-D-B$：$\binom{8}{4}\binom{4}{1}=280$，所以安全搬運$C_2$糖回巢的方法有 490-280=210 種。
3. $A-C_3-B$：$\binom{8}{5}\binom{7}{5}=1176$，$A-C_3-D-B$：$\binom{8}{5}\binom{3}{1}\binom{4}{1}=672$，所以安全搬運$C_3$糖回巢的方法有 1176-672=504 種。
4. $A-C_4-B$：$\binom{8}{6}\binom{7}{4}=980$，$A-C_4-D-B$：$\binom{8}{6}\binom{3}{1}\binom{4}{1}=336$，所以安全搬運$C_4$糖回巢的方法有 980-336=644 種。　=>這種最多
5. $A-C_5-B$：$\binom{8}{7}\binom{7}{3}=280$，$A-C_5-D-B$：$\binom{8}{7}1\binom{4}{1}=32$，所以安全搬運$C_3$糖回巢的方法有 280-32=248 種。
6. $A-C_6-B$：$\binom{7}{2}=21$

3. 如圖，$ABCD$ 為圓 O 的內接四邊形，設$\overline{AB}=r$，$\overline{BC}=s$，$\overline{CD}=t$，$\overline{DA}=u$，且其兩條對角線 $\overline{AC}$ 和 $\overline{BD}$相交於 P 點。若ΔBCP面積 $=\lambda$，試求 ΔABP面積之值 (請以 r、s、t、u、 λ 表示 ΔABP面積) 。(10 分)



【參考解答】：Ans: $\dfrac{ru\lambda}{st}$

在$\overline{AB}$上取一點 E 使得 $\angle APE=\angle ABC$ ，則 $\Delta ABC\sim\Delta APE$



故我們可得 $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\dfrac{\overline{AP}}{\overline{PE}}$ $\cdots\cdots\cdots(1)$

連接$\overline{CE}$ 。

因為$\angle APE=\angle ABC$，所以可推得 $BCPE$ 四點共圓。

故可推得 $\angle ACE=\angle ABD=\angle ACD$。

因為 $\angle ADC=180^\circ-\angle ABC=180^\circ-\angle APE=\angle CPE$

所以$\Delta ADC\sim\Delta EPC$

故我們可得 $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{CD}}=\dfrac{\overline{PE}}{\overline{PC}}$ $\cdots\cdots\cdots(2)$

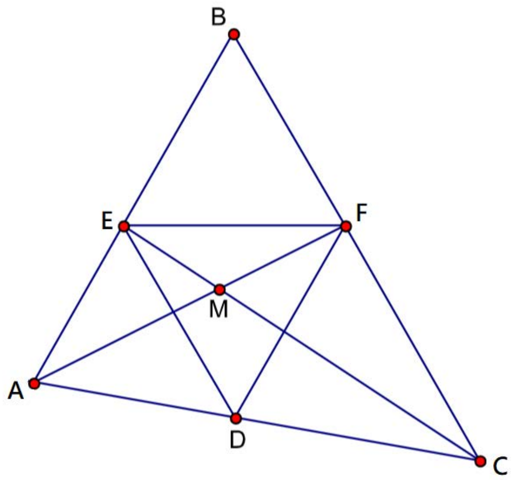
由(1)(2)可求得 $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{CP}}=\dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}}{\overline{BC}\cdot\overline{CD}}=\dfrac{ru}{st}$

又 $\dfrac{\Delta ABP\text{面積}}{\Delta BCP\text{面積}}=\dfrac{\overline{AP}}{\overline{CP}}=\dfrac{ru}{st}$

所以ΔABP面積 $=\dfrac{ru}{st}\Delta BCP$面積 $=\dfrac{ru\lambda}{st}$

4. 一張三角形 ABC 紙張，其中 $\angle ABC=60^\circ$ ，今將此三角形對折，使得點 B 落在$\overline{AC}$邊上與 D 點重合。令摺線段為線段$\overline{EF}$，其中 E 點位於$\overline{AB}$邊上，F 點位於$\overline{BC}$邊上，且$\overline{BE}=\overline{BF}$。若$\overline{AF}$與$\overline{CE}$相交於 M 點。試證:$(\overline{EF})^2=\overline{AF}\cdot\overline{FM}$。 (10 分)

【參考解答】



因為$\overline{BE}=\overline{BF}$，且角 B 為 60 度，

因此三角形 BEF 為正三角形，

同理，三角形 DEF 也是正三角形。

因此 $\overline{ED}//\overline{BC}$，$\overline{FD}//\overline{AB}$。

所以 $\dfrac{\overline{EA}}{\overline{EB}}=\dfrac{\overline{AD}}{\overline{DC}}=\dfrac{\overline{BF}}{\overline{CF}}$，

因為$\overline{BE}=\overline{BF}=\overline{EF}$，

所以 $\dfrac{\overline{EA}}{\overline{EF}}=\dfrac{\overline{EF}}{\overline{CF}}$ 。

又因角 AEF=角 EFC=120 度。

所以三角形 AEF 與三角形 EFC 相似(SAS 相似)。

因此角 EAF=角 FEC=角 FEM，所以三角形 AEF 與三角形 EMF 相似(AA 相似)。

所以 $\dfrac{\overline{\mathrm{EF}}}{\overline{\mathrm{FM}}}=\dfrac{\overline{\mathrm{AF}}}{\overline{\mathrm{EF}}}$ ，所以$(\overline{EF})^2=\overline{AF}\cdot\overline{FM}$。

5. 已知實數 a,b,c 滿足下列條件:

$$\frac{a}{1^2+2^2}+\frac{b}{2^2+3^2}+\frac{c}{2^2+5^2}=1$$

$$\frac{a}{1^2+4^2}+\frac{b}{3^2+4^2}+\frac{c}{4^2+5^2}=1$$

$$\frac{a}{1^2+6^2}+\frac{b}{3^2+6^2}+\frac{c}{5^2+6^2}=1$$

試求 $a+b+c$ 之值。 **(10 分)**

【參考解答】

由題意知，當 $t=2^2,4^2,6^2$ 時，滿足分式方程式

$$\frac{a}{t+1^2}+\frac{b}{t+3^2}+\frac{c}{t+5^2}=1$$

將此分式方程式化簡為

$$1=\frac{a(t+3^2)(t+5^2)+b(t+1^2)(t+5^2)+c(t+1^2)(t+3^2)}{(t+1^2)(t+3^2)(t+5^2)}$$

$$=\frac{(a+b+c)t^2+[a(3^2+5^2)+b(1^2+5^2)+c(1^2+3^2)]t+a\times3^2\times5^2+b\times1^2\times5^2+c\times1^2\times3^2}{t^3+(1^2+3^2+5^2)t^2+(1^2\times3^2+3^2\times5^2+5^2\times1^2)t+1^2\times3^2\times5^2}$$

因此

$$t^3+(1^2+3^2+5^2)t^2+(1^2\times3^2+3^2\times5^2+5^2\times1^2)t+1^2\times3^2\times5^2$$
$$=(a+b+c)t^2+[a(3^2+5^2)+b(1^2+5^2)+c(1^2+3^2)]t+a\times3^2\times5^2+b\times1^2\times5^2+c\times1^2\times3^2$$

所以得到一元三次方程式

$$t^3+[(1^2+3^2+5^2)-(a+b+c)]t^2$$
$$+[(1^2\times3^2+3^2\times5^2+5^2\times1^2)-a(3^2+5^2)-b(1^2+5^2)-c(1^2+3^2)]t$$
$$+1^2\times3^2\times5^2-a\times3^2\times5^2-b\times1^2\times5^2-c\times1^2\times3^2=0$$

又 $t=2^2,4^2,6^2$ 為此方程式的解，由根與係數性質得

$2^2+4^2+6^2=-(1^2+3^2+5^2)+(a+b+c)$

因此 $a+b+c=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2=91$