109 學年度普通型高級中等學校數學科能力競賽試題

第 6 區(屏東高中) 筆試(二)試題與解答

注意事項：
本試卷共 4 題，滿分 21 分。第一題 5 分，第二題 5 分，第三題 5 分，第四題 6 分。

一、試求出所有且滿足下列條件的平方數(可化為某個整數的平方)。

a. 大於 100，

b. 個位數與十位數皆不為零，

c. 將其以十進位表示，且去掉其個位數與十位數後仍然是一個平方數(非減去)。

[參考解答] 121, 144, 169, 196, 441, 484, 961, 1681。

設該數為a^2，去掉其個位數與十位數後所得的數為b^2。
則$a^2=100b^2+c$。
因個位數與十位數皆不為零，故$11\le c\le 99$。
可得$a^2=100b^2+c\ge 100b^2+11$及$a\ge 10b+1$。
故$99\ge c=a^2-100b^2\ge 20b+1$，可得$b\le 4$。
若$b=1$，可得 121,144,169,196。
若$b=2$，可得 441,484。
若$b=3$，可得 961。
若$b=4$，可得 1681。

二、已知一數列 13，25，43，...，它的第 n 項是 $a_n=3(n^2+n)+7$。

證明：數列的任一項都不是整數的立方。

[參考解答]

用反證法證明。
假設存在某個整數 t，它對於某個下標 n 滿足

$$a_n=3n(n+1)+7=t^3$$

因為 n(n+1) 為偶數，所以 t 為奇數。設 t=2s+1，其中 s 是整數，則

$$3(n^2+n)+7=(2s+1)^3=8s^3+12s^2+6s+1$$

$$3(n^2+n)+6=8s^3+12s^2+6s$$

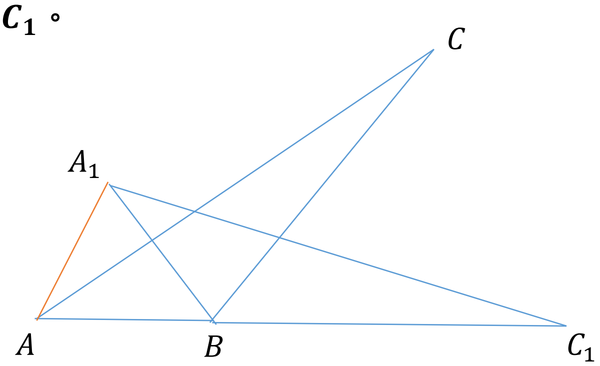
所以，3 整除 $8s^3$，因此，s 可被 3 整除。
設 s=3k，其中 k 是整數，則

$$3(n^2+n)+6=8\cdot 27k^3+12\cdot 9k^2+6\cdot 3k$$

$$(n^2+n)+2=72k^3+36k^2+6k$$

因為右式可被 3 整除，左式不可被 3 整除(n=3m, 3m+1, 3m+2 代入均不滿足)，於是得到矛盾。所以，假設錯誤，故數列的任一項都不是整數的立方。■

三、如下圖所示，將一個鈍角△ABC（其中$\angle ABC=120°$）繞點 B 順時針旋轉得 △A_1BC_1，使得 C 點落在 AB 的延長線上的點 C_1 處，連接 AA_1，試證: $\angle A_1AC=\angle C_1$。



[參考解答]

$\because\ \angle ABC=\angle ABA_1+\angle A_1BC=\angle A_1BC_1$

$=\angle A_1BC+\angle CBC_1$

$\therefore\ \angle ABA_1=\angle CBC_1=180°-\angle ABC=60°$

$\because\ AB=A_1B$，$\angle ABA_1=60°$

$\therefore$ △ABA_1 為正三角形

$\Longrightarrow\ AA_1\parallel BC\ \Longrightarrow\ \angle A_1AC=\angle ABC$

$\because\ \triangle ABC\cong\triangle A_1BC_1$

$\therefore\ \angle A_1AC=\angle ACB=\angle AC_1B=\angle C_1$

四、令 $A=\left(2+\sqrt{2}\right)^n$，$B=\left(2-\sqrt{2}\right)^n$，$n$ 為任意正整數。令 $A=I+F$，I 為 A 的整數部分，F 為 A 的小數部分，試證 $F+B=1$。

[參考解答]

令 $C=A+B$

則 C 為正整數

因為 $C=A+B=I+F+B$

所以 $C-I=F+B$

因為$C-I$為正整數，$F+B<2$(因為 $F<1, B<1$)

所以 $F+B=1$