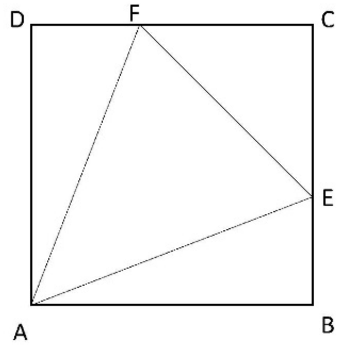
109學年度高級中學數學科能力競賽複賽試題

南區（台南區）　筆試（一）{參考解答}

一、如圖所示，正方形$ABCD$的邊長為2，點E和F分別在邊BC和CD上，使得ΔCEF的周長為4，試求：

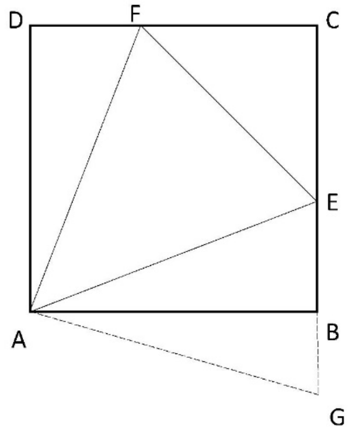
(1) $\angle EAF$的度數；

(2) ΔEAF 面積的最小值。



【參考解答】

(1). 延長CB至G，使$\mathrm{BG}=\mathrm{DF}$，則$\Delta\mathrm{ABG}\cong\Delta\mathrm{ADF}$。因此，$\mathrm{AG}=\mathrm{AF}$，$\angle\mathrm{GAB}=\angle\mathrm{FAD}$，$\angle\mathrm{FAG}=\angle\mathrm{DAB}=90^\circ$。



因為$\mathrm{EF}=4-\mathrm{CF}-\mathrm{CE}=2-\mathrm{CF}+2-\mathrm{CE}=\mathrm{DF}+\mathrm{BE}=\mathrm{BG}+\mathrm{BE}=\mathrm{EG}$

且AE共用

所以$\Delta\mathrm{AEF}\cong\Delta\mathrm{AEG}$，故$\angle\mathrm{EAF}=\angle\mathrm{EAG}=\frac{1}{2}\angle FAG=45^\circ$。

(2). 設$\mathrm{CE}=x$，$\mathrm{CF}=y$，$\mathrm{EF}=z$，則 $\begin{cases}x+y+z=4\\x^2+y^2=z^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4-y-z\\x^2+y^2=z^2\end{cases}$

於是$(4-y-z)^2+y^2=z^2\Longrightarrow 2y^2+(2z-8)y+(16-8z)=0$

因為$\mathrm{y}>0$，考慮判別式$\mathrm{D}=4(z-4)^2-64(2-z)\geq 0$，即

$$(\mathrm{z}+4+4\sqrt{2})(\mathrm{z}+4-4\sqrt{2})\geq 0$$

又因為$\mathrm{z}>0$，所以$\mathrm{z}\geq 4\sqrt{2}-4$。當$\mathrm{x}=\mathrm{y}=4-2\sqrt{2}$時等號成立。

$\Delta\mathrm{EAF}$的面積$=\Delta\mathrm{FAG}$的面積$=\frac{1}{2}EG\times AB=\frac{1}{2}z\times 2=z\geq 4\sqrt{2}-4$

故$\Delta\mathrm{EAF}$面積的最小值為$4\sqrt{2}-4$。

二、已知函數f的定義域為正整數而其函數值為非負整數，並滿足

$f(m+n)-f(m)-f(n)=0$ 或 1，$f(1)=0,\ \ f(2)>0,\ \ f(300)=150$。

試求$f(109)$之值?

【參考解答】: m=n=1 時會得到 f(2)=0 或 1，所以我們知道 f(2)=1。從 f(m+n)-f(m)-f(n)=0 或 1 可以得到 f(m+2)的可能值為 f(m)+1 或 f(m)+2，或者說最小的可能性為 f(m)+1，而 f(m+4)的最小可能性為 f(m)+2。由此推知，f(300)最小的可能性為 150 符合給定的條件 。也就是說，當 m, n 都是偶數是會滿足 f(m+n)-f(m)-f(n)=0 或 f(2k)=k。

當 n=2k+1 奇數時，f(2k+1)=f(2k)+f(1)+0 或 1，因此 f(2k+1)=k 或 k+1，如果有某個 2k+1=<109 滿足 f(2k+1)=k+1，則 f(4k+2)=f(2k+1)+f(2k+1)+0 或 1，或者說 f(4k+2)=2k+2 或 2k+3，和已知 f(4k+2)=2k+1 矛盾。

所以我們就知道 f(109)=f(2*54+1)=54。

三、設$f(4a)+4f(b)=f(f(a+b))$，函數f的定義域及值域均為整數，求此函數為何?

【參考解答】$b=x\quad a=0$，$f(0)+4f(x)=f(f(x))$

$a=1$，$f(4)+4f(x)=f\big(f(x+1)\big)=f(0)+4f(x+1)$

$$\frac{f(4)-f(0)}{4}=f(x+1)-f(x)$$

故$f(x)=mx+n$

$m(4a)+n+4(mb+n)=m(m(a+b)+n)+n$

$4m(a+b)+5n=m^2(a+b)+mn+n$

所以 $m=0, n=0$；$m=4,\ n\in\mathbb{Z}$

因此 $f(x)=0$ 或 $f(x)=4x+n,\quad n\in\mathbb{Z}$

四、從 1 到 2020 這 2020 個正整數中，最多可以取出多少個相異數，使得所取出的數中任意 5 個數的和均為 55 的倍數?(答案須詳敘理由)

【參考解答】設 $a_1<a_2<\cdots<a_n$ 符合所求

對任意 6 個數

$a_i<a_j<a_k<a_l<a_m<a_o,\quad,\quad i,j,k,l,m,o=1,2,\ldots..,n$

$55\,|\,a_i+a_k+a_l+a_m+a_o,\ \ 55\,|\,a_j+a_k+a_l+a_m+a_o$

$55\,|\,a_j-a_i$

$a_i = a_1 + 55l_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$

$55 \mid a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ 所以 $55 \mid 5a_1 + 55l_2 + 55l_3 + 55l_4 + 55l_5$

$55 \mid 5a_1$, $11 \mid a_1$, $a_1 \geq 11$

又 $l_n = \frac{a_n - a_1}{55} \leq \frac{2020 - 11}{55} < 37$

$l_n \leq 36$, 故 37 個

11, 11+55×1, 11+55×2, 11+55×3, ……, 11+55×36.