109 學年度臺北市（陽明高中）
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試（一）解答

【問題一】 試求滿足 $y=\dfrac{7x^3-2x^2-21x+62}{3x^3+x+1}$ 的所有整數解 (x,y)。

(12 分)

【解】 顯然 $(0,62)$ 是一組解。又原式可以化成

$$y=2+\frac{x^3-2x^2-23x+60}{3x^3+x+1}=2+\frac{(x-3)(x-4)(x+5)}{3x^3+x+1}\ ,$$

因此，$(3,2),(4,2),(-5,2)$ 也是解。

以下，證明沒有其他的整數解了。

(1) 以 $x=1$ 代入得 $y=\dfrac{46}{5}$ 不是整數。

(2) 當 $x\geq 2$ 時，$3x^3+x+1>x^3-2x^2-23x+60\geq 0$；因此，除了 $x=3,4$ 之外，y 都不是整數。

(3) 分別以 $x=-1,-2,-3$ 代入，可知 y 都不是整數。

(4) 當 $x\leq -4$ 時，$\left|3x^3+x+1\right|>\left|x^3-2x^2-23x+60\right|\geq 0$；因此，除了 $x=-5$ 之外，y 都不是整數。

綜合以上的討論，所求整數解為 $(0,62),(3,2),(4,2),(-5,2)$。

【**問題二**】給定正實數數列 $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7$ ，並將它重新排成一列 $b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6,b_7$ 。若 $(a_1+\frac{1}{b_1})\times(a_2+\frac{1}{b_2})\times\cdots\times(a_7+\frac{1}{b_7})\le 128$ ，試證：數列 $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7$ 中至少有一項的值等於 1 。

(12 分)

【**解**】由算幾不等式

$$128\ge(a_1+\frac{1}{b_1})\times(a_2+\frac{1}{b_2})\times\cdots\times(a_7+\frac{1}{b_7})\ge 2\sqrt{\frac{a_1}{b_1}}\times 2\sqrt{\frac{a_2}{b_2}}\times\cdots\times 2\sqrt{\frac{a_7}{b_7}}=2^7=128\text{ ，}$$

得知上式的不等式均可改為等號，即

$$(a_1+\frac{1}{b_1})\times(a_2+\frac{1}{b_2})\times\cdots\times(a_7+\frac{1}{b_7})=128\text{ ，}$$

且對每一個 k ， $a_k=\frac{1}{b_k}$ 均成立。

（1）若存在某一個 k 使得 $a_k=b_k$ ，則 $a_k=\frac{1}{b_k}=\frac{1}{a_k}$ ，可得 ${a_k}^2=1$ 。又 a_k 為正數，可知 $a_k=1$ 。

（2）若對每一個 k ， $a_k\ne b_k$ ，則 $b_1\in\{a_2,a_3,\cdots,a_7\}$ 。不失一般性，可設 $b_1=a_2$ 。再由 $\frac{1}{a_1}=b_1=a_2=\frac{1}{b_2}$ ，可得 $a_1=b_2$ 且 $a_1a_2=b_1b_2=1$ 。因此，。

$$(a_1+\frac{1}{b_1})\times(a_2+\frac{1}{b_2})=a_1a_2+\frac{a_2}{b_1}+\frac{a_1}{b_2}+\frac{1}{b_1b_2}=4\text{ 。}$$

故 $(a_3+\frac{1}{b_3})\times(a_4+\frac{1}{b_4})\times(a_5+\frac{1}{b_5})\times(a_6+\frac{1}{b_6})\times(a_7+\frac{1}{b_7})=\frac{128}{4}=32$ 。

仿上面的作法，可得到另一組（a_3,a_4,b_3,b_4）滿足 $a_3=b_4,a_4=b_3$ 且 $a_3a_4=b_3b_4=1$ 。因此， $(a_3+\frac{1}{b_3})\times(a_4+\frac{1}{b_4})=4$ 。故

$$(a_5+\frac{1}{b_5})\times(a_6+\frac{1}{b_6})\times(a_7+\frac{1}{b_7})=\frac{32}{4}=8$$

再重複上面的過程，可得 $(a_5+\frac{1}{b_5})\times(a_6+\frac{1}{b_6})=4$ ；故 $a_7+\frac{1}{b_7}=2$ 。

又 $a_7=\frac{1}{b_7}$ ，可推得 $a_7=1$ 。（此時， $b_7=1=a_7$ 矛盾！）

【**問題三**】設 p,q 均為正整數，其中 $q \ge 2p \ge 4$。假設某一國家想在 p 個無人島中建設 q 個城市，每個無人島至少設置兩個城市，若要求每兩個位在不同島的城市之間都要有一條連通的直達航線，試問此國家最少需要設置多少條直達的航線。

(12 分)

【**解**】不失一般性，可設 a_i 表示第 i 個無人島中建設的城市個數，且

$$a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \cdots \ge a_p \ge 2 \text{ 。}$$

則 $\sum_{i=1}^{p} a_i = q$，且所需要設置的直達航線為 $\sum_{i<j} a_i a_j$ 條。

若 $a_1 \ge a_k \ge 3$，考慮將第 k 個無人島中的一個城市 A 移至第 1 個無人島，此時，無人島的城市個數依序為 $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_p$，其中

$$b_i = \begin{cases} a_1 + 1; \text{ 當 } i = 1 \\ a_k - 1; \text{ 當 } i = k \\ a_i; \text{ 當 } i \ne 1, k \end{cases} \text{ 。}$$

顯然，調整後所需要設置的直達航線為 $\sum_{i<j} b_i b_j$ 條，且 $\sum_{i=1}^{p} b_i = q$。又

$$\begin{aligned}
\sum_{i<j} b_i b_j &= b_1 \sum_{i \ne 1} b_i + b_k \sum_{i \ne k} b_i + \sum_{i,j \notin \{1,k\}} b_i b_j \\
&= (a_1+1)(q-a_1-1) + (a_k-1)(q-a_k+1) + \sum_{i,j \notin \{1,k\}} a_i a_j \\
&= 2(a_k - a_1 - 1) + a_1(q-a_1) + a_k(q-a_k) + \sum_{i,j \notin \{1,k\}} a_i a_j \\
&= 2(a_k - a_1 - 1) + a_1 \sum_{i \ne 1} a_i + a_k \sum_{i \ne k} a_i + \sum_{i,j \notin \{1,k\}} a_i a_j \\
&= 2(a_k - a_1 - 1) + \sum_{i<j} a_i a_j < \sum_{i<j} a_i a_j \text{ 。}
\end{aligned}$$

即此種調整後所需要設置的直達航線數會變少。因此，要達到最少直達航線的總數，就要把城市集中到同一個無人島，即

$$a_1 = q - 2(p-1) \text{ 且 } a_2 = a_3 = \cdots = a_p = 2 \text{ 。}$$

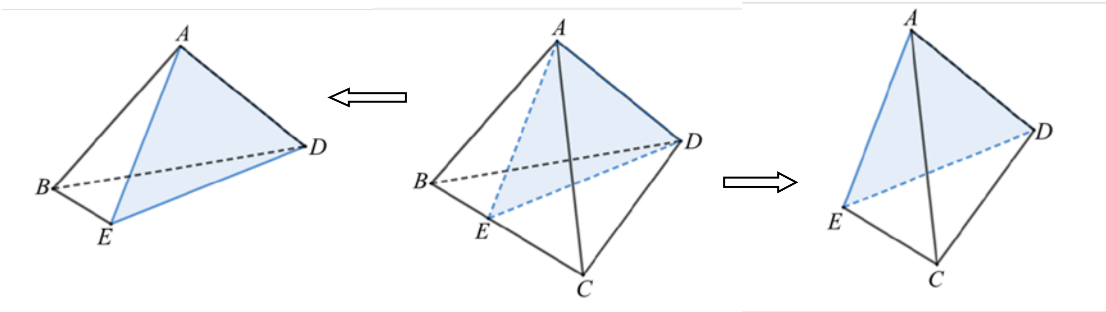
故最少需要設置直達的航線總數為

$$\begin{aligned}
a_1 \sum_{i=2}^{p} a_i + \sum_{2 \le i < j} a_i a_j &= \big(q - 2(p-1)\big) \times 2(p-1) + 2^2 C_2^{p-1} \\
&= 2(pq - p^2 + p - q) \text{ (條)。}
\end{aligned}$$

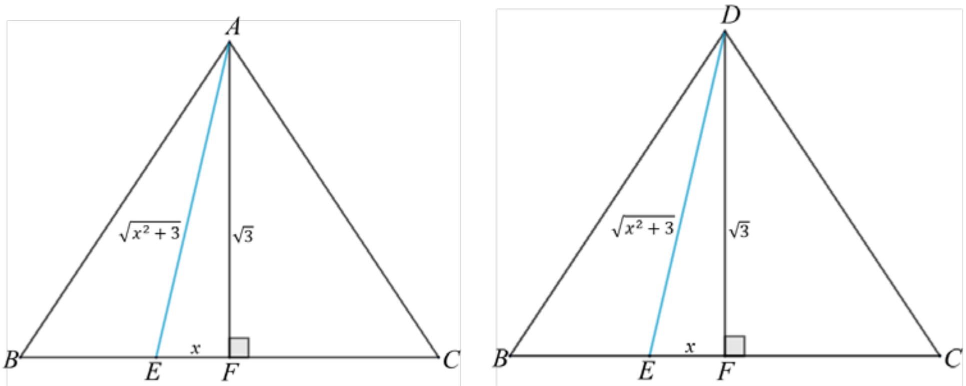
【問題四】 設 $ABCD$ 為正四面體，各稜的長度均為 2。若點 E 在稜 $\overline{BC}$ 上，將正四面體 $ABCD$ 分成兩個四面體 $ABDE$ 與 $ACDE$，它們的內切球半徑分別為 r_1, r_2，且滿足 $\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_2}=4\sqrt{6}+4\sqrt{3}$。已知滿足此條件的點 E 有兩個，分別為 E_1, E_2，試求 $\overline{E_1E_2}$ 的長度。

(13 分)

【解】



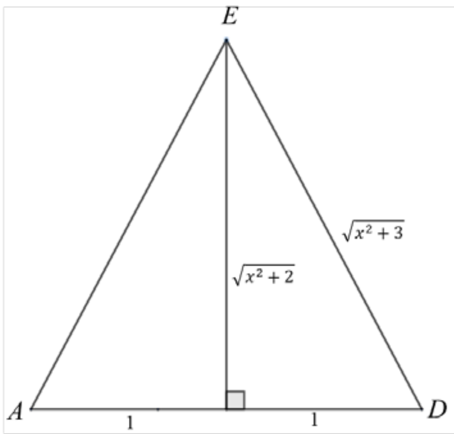
設 $\overline{BC}$ 的中點為 F，則有 $\overline{AF}\perp\overline{BC}$ 和 $\overline{DF}\perp\overline{BC}$。



令 $\overline{EF}=x$，利用畢氏定理可知

$\overline{AE}=\overline{DE}=\sqrt{x^2+3}$，因此可推得等腰

三角形 $\triangle ADE$ 的面積為 $\sqrt{x^2+2}$。



利用四面體的體積公式為$\frac{1}{3}\times$(底面積)$\times$高，可求得

$$ABCD\text{體積}=\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{\frac{8}{3}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$ABDE\text{體積}=\frac{1}{3}\times(\frac{\sqrt{3}}{2}(1-x))\times\sqrt{\frac{8}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{3}(1-x)\text{。}$$

$$ACDE\text{體積}=\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3}(1-x)=\frac{\sqrt{2}}{3}(1+x)$$

同時，也可求得上述四面體每個面的表面積：

$$\begin{aligned}&\Delta ABE\text{面積}=\Delta DBE\text{面積}=\frac{\sqrt{3}}{2}(1-x)\\&\Delta ACE\text{面積}=\Delta DCE\text{面積}=\frac{\sqrt{3}}{2}(1+x)\end{aligned}\text{。}$$

因為內切球的球心將一個四面體分成四個三角錐，所以四面體的體積V等於四個小三角錐的體積和。例如；若四面體$ABCD$的球心半徑為r，且每一面的面積分別表示成s_A,s_B,s_C,s_D，則有

$$V=\frac{1}{3}\cdot s_A\cdot r+\frac{1}{3}\cdot s_B\cdot r+\frac{1}{3}\cdot s_C\cdot r+\frac{1}{3}\cdot s_D\cdot r\ \Leftrightarrow\ r=\frac{3V}{s_A+s_B+s_C+s_D}\text{。}$$

利用此公式，可進一步求得兩個內切球的半徑為

$$r_1=\frac{\sqrt{2}(1-x)}{\sqrt{3}+\sqrt{3}(1-x)+\sqrt{x^2+2}},\ r_2=\frac{\sqrt{2}(1+x)}{\sqrt{3}+\sqrt{3}(1+x)+\sqrt{x^2+2}}\text{。}$$

由此可解得

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=\sqrt{6}+(\sqrt{3}+\sqrt{x^2+2})\times\frac{\sqrt{2}}{1-x^2}=4\sqrt{6}+4\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow\ \frac{\sqrt{3}+\sqrt{x^2+2}}{1-x^2}=3\sqrt{3}+2\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow\ x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$

故$\overline{E_1E_2}$的長度為$\overline{E_1E_2}=2x=\frac{2\sqrt{6}}{3}$。