109 學年度臺北市（陽明高中）
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科口試解答

注意事項：

1. 本口試卷共兩大題，思考時間 15 分鐘；參賽者可先在本試卷作答，口試時請攜帶本試卷應試，口試答辯時間為 15 分鐘，答辯完畢後繳回本試卷。
2. 本項測驗著重解題技巧、表達能力與邏輯思維，參賽者不需太專注於計算的精確度。

【問題一】 設 x 為實數。試求 $\dfrac{x-x^3}{1+2x^2+x^4}$ 的最大值，及產生此最大值時的 x 值。

【解】 提示：令 $x=\tan\theta$ 代換成三角問題。

令 $x=\tan\theta$，則

$$\frac{x-x^3}{1+2x^2+x^4}=\frac{\tan\theta(1-\tan^2\theta)}{(1+\tan^2\theta)^2}=\frac{\tan\theta}{\sec^2\theta}\times\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$$

$$=\sin\theta\cos\theta\cos 2\theta=\frac{1}{4}\sin 4\theta \text{ 。}$$

當 $4\theta=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 時，$\dfrac{x-x^3}{1+2x^2+x^4}$ 有最大值 $\dfrac{1}{4}$。

即當 $x=\tan\theta=\tan(\dfrac{n\pi}{2}+\dfrac{\pi}{8})=\sqrt{2}-1$ 或 $-\sqrt{2}-1$ 時，$\dfrac{x-x^3}{1+2x^2+x^4}$ 有最大值 $\dfrac{1}{4}$。

【問題二】已知 A,B,C 為空間中不共線的相異三點，其中 $\overline{AB}=2\overline{BC}$，試求 $\angle BAC$ 的最大值，並分別以代數和幾何的方法說明理由。

【解】

代數方法：（提示：利用餘弦定理）

令 $\overline{AB}=2a,\overline{BC}=a,\overline{CA}=b$，由餘弦定理得

$$\cos\angle BAC=\frac{(2a)^2+b^2-a^2}{2\cdot 2a\cdot b}=\frac{3a^2+b^2}{4ab}\geq\frac{2\sqrt{3a^2b^2}}{4ab}=\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos 30^\circ$$ 。

因此，$\angle BAC\leq 30^\circ$。（當 $b=\sqrt{3}a$ 時，等號成立）

幾何方法：（提示：以 B 為圓心作一適當的圓）

設以 B 為圓心、$\overline{BC}$ 為半徑的圓為 Γ。由點 A 作 $\overline{AD}$ 與圓 Γ 相切於點 D，則 ΔABD 為直角三角形，且

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{1}{2}$$ 。

因此，$\angle BAD=30^\circ$。進一步可推得 $\angle BAC\leq\angle BAD=30^\circ$。

（當 $C=D$ 時，等號成立）