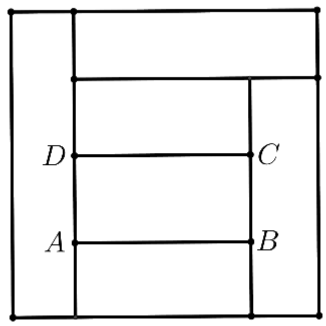
109 學年度高級中學數學學科能力競賽

嘉義區複賽試題（二）【解答】

一、【解】

令 $AB=x$, AD=y, 因為面積相同，



可以求得 BC 右方的矩形邊長為 $(\frac{x}{3},3y)$,

右上矩形的邊長為 $(\frac{4x}{3},\ \frac{3y}{4})$,

所以 AD 左邊的矩形邊長為 $(\frac{4x}{15},\ \frac{15y}{4})$.

而外邊為一正方形，故 $\frac{24x}{15}=\frac{15y}{4}$. 因此 $x:y=225:96$.

二、【解】

- **一次試驗:**

P(得 2 分)

=P((4 枚硬幣的面額總和大於十五)∩(投擲出現 4 枚同面))

=P(4 枚硬幣的面額總和大於十五)×P(投擲出現 4 枚同面)

=P((1 枚十元、2 枚五元、1 枚一元)∪(1 枚十元、1 枚五元、2 枚一元))×P(投擲出現 4 枚同面)

=[P(1 枚十元、2 枚五元、1 枚一元) +P(1 枚十元、1 枚五元、2 枚一元)] ×P(投擲出現 4 枚同面)

$$=\left[\frac{C_1^1C_2^2C_1^3}{C_4^{1+2+3}}+\frac{C_1^1C_1^2C_2^3}{C_4^{1+2+3}}\right]\times 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$=\left[\frac{3}{15}+\frac{6}{15}\right]\times\frac{2}{16}=\frac{18}{240}=\frac{3}{40}$$

P(得 1 分)

=P((4 枚硬幣的面額總和小於十)∩(投擲出現 2 枚正面 2 枚反面))

=P(4 枚硬幣的面額總和小於十)×P(投擲出現 2 枚正面 2 枚反面)

=P(1 枚五元與 3 枚一元)×P(投擲出現 2 枚正面 2 枚反面)

$$=\frac{C_1^2C_3^3}{C_4^{3+2+1}}\times\frac{4!}{2!2!}\left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$=\frac{2}{15}\times\frac{6}{16}=\frac{12}{240}=\frac{2}{40}$$

P(得 0 分)=1- P(得 2 分)- P(得 1 分)=35/40

- **獨立重複執行此試驗三次:**

  P(試驗三次總分高於 1 分)

  =1−P(試驗三次總分小於等於 1 分)

  =1−P(試驗三次皆為 0 分)−P(試驗三次中有兩次 0 分一次 1 分)

  =1−$(35/40)^3$−3×$(35/40)^2$(2/40)

  =13775/64000

  =551/2560

三、【解】

令 $a=1707$。設 d 為所求之最大公因數，令 $b=\dfrac{a^{11}+1}{a+1}, b_1=\dfrac{a^{101}+4a+5}{a+1}$，則由輾轉相除法原理可知 $d\,|\,b\cdot a^{90}-b_1$，即 $d\,|\,\dfrac{a^{90}-4a-5}{a+1}$，令 $b_2=\dfrac{a^{90}-4a-5}{a+1}$。不斷使用此方法，可得 $d\,|\,\dfrac{a^{2}-4a-5}{a+1}$，即 $d\,|1702$，其中 $1702=2\cdot 23\cdot 37$。可注意到 $23, 37$ 均非 1708 的因數。

由於 $\dfrac{a^{11}+1}{a+1}=a^{10}-a^9+a^8-a^7+\ldots+a^2-a+1$ 為奇數，所以 d 沒有質因數 2。

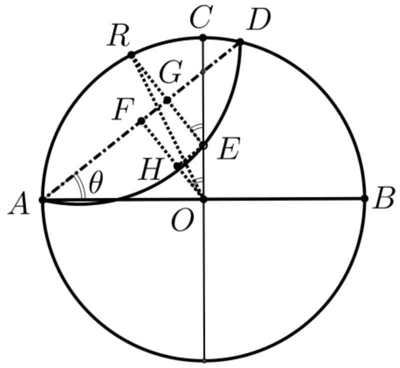
$a\equiv 5 \pmod{23}$ 可推得 $a^{11}+1\equiv a^{101}+4a+5\equiv 0 \pmod{23}$。所以 23 為 d 的質因數。

$a\equiv 5 \pmod{37}$ 可推得 $a^{11}+1\equiv 3 \pmod{37}$。所以 37 不為 d 的質因數。

因此 $d=23$。

四、【解】

如右圖 R 是在 $\overset{\frown}{AD}$ 上一點使得 $ER\perp AD$， ER 與 AD 交於 G， F 是 O 在 AD 上的投影點，H 是 E 在 OF 上的投影點。記 $\angle OAD=\theta$. 則 $GE=OF-OH=\sin\theta-\frac{1}{3}\cos\theta$，對 ΔOER 使用餘弦定律得



$1=\left(\frac{1}{3}\right)^2+4(\sin\theta-\frac{1}{3}\cos\theta)^2+2\cdot\frac{1}{3}\cdot2(\sin\theta-\frac{1}{3}\cos\theta)\cos\theta$

化簡得 $\frac{2}{9}=\sin^2\theta-\frac{1}{3}\sin\theta\cos\theta$. 左右兩邊同除以 $\cos^2\theta$

得 $\frac{2}{9}(1+\tan^2\theta)=\tan^2\theta-\frac{1}{3}\tan\theta$ 或

$7\tan^2\theta-3\tan\theta-2=0$. 解得 $\tan\theta=\dfrac{3+\sqrt{65}}{14}$.

五、【解】

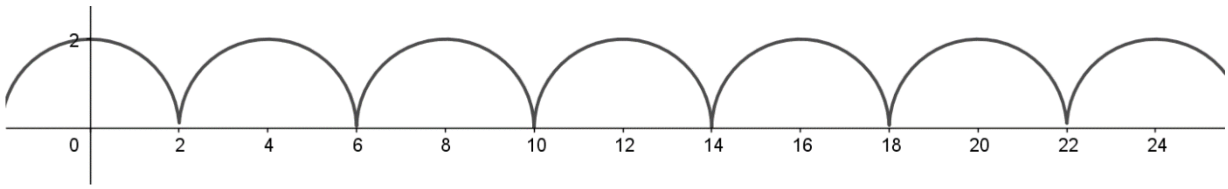
數列必不含 1 及大於 $\dfrac{30}{2}=15$ 的質數。而與 11, 13 相鄰的只能是 2 的倍數，它們也必在數列的首尾，一個滿足條件的數列如下：

$13,\underline{26,4,10},5,25,15,\underline{27,9,3,21},7,28,\underline{2,6,8,12,14,16,18,20,24,30,22},11$

所以答案是 25.

六、【解】

曲線 Γ 的圖形為一系列半徑為 2 且圓心在 x 軸上的半圓所組成(如下圖)。



令 C_n 表曲線 Γ 上位於 x 軸正向的第 n 個半圓，其圓心為 $(4n,0)$。 $y=\dfrac{1}{m}x$ 欲與 Γ 有 101 個相異交點若且唯若 $y=\dfrac{1}{m}x$ 與 C_{50} 交於兩點且與 C_{51} 不相交，即

$$\frac{\frac{200}{m}}{\sqrt{\frac{1}{m^2}+1}}<2<\frac{\frac{204}{m}}{\sqrt{\frac{1}{m^2}+1}},$$

解得 $100^2-1<m^2<102^2-1$，所以 $m=100,101$。