

109 學年度北一區（花蓮高中）
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試（二）試題

編號：_____（學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共八題填充題，每題 3 分，滿分為 24 分。
2. 考試時間：1 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將答案依序填寫在答案欄內。

1. 設 $P(x)$ 為一實係數多項式。若 $P(0) = 0$ 且對任一實數 x ，恆有

$$P(x^2 + 1) = (P(x))^2 + 1,$$

求此多項式 $P(x) =$ _____（一）_____。

2. 設 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ 為定義在正整數的實數值函數。已知 $f(1) = 2020$ 且對所有的正整數 $n > 1$ ，恆有 $f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = n^2 f(n)$ ，試求 $f(2020) =$ _____（二）_____。

3. 已知 $x = \tan \alpha$ ，求 $\tan 4\alpha =$ _____（三）_____。（將答案表為 x 的分式，且分子與分母需互質）

4. 自三個數 0, 1, 2 中任取一數，假設每一數被取的機率相同，取後放回，共取 9 次。求所取得 9 個數之算術平均數的小數點以下第一位數字為 1 的機率為 _____（四）_____。

5. 設正三角形 ABC 的外接圓半徑為 5。若 P 為此外接圓上的動點且令 $\overline{AP}, \overline{BP}, \overline{CP}$ 的長度分別為 x, y, z ，則 xyz 的最大值為 _____（五）_____。

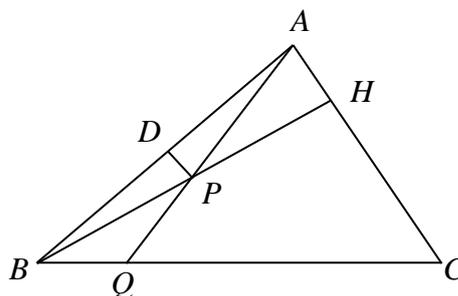
《背面尚有試題》

6. 在坐標平面上，一隻青蛙依照如下的模式跳動：

「當它在 (x, y) 時，下一步會跳至 $\left(y, \frac{1-x}{1-xy}\right)$ 。」

若青蛙開始位於 $\left(3, \frac{2}{3}\right)$ ，則青蛙跳 109 步後的坐標為 (六) 。

7. 如下圖， $\triangle ABC$ 中 $\overline{AB} = 6$ ， $\overline{BC} = 2\sqrt{10}$ ， $\overline{AC} = 4$ ； \overline{AB} 的垂直平分線與 \overline{AC} 邊上之高交於 P 點，且 \overline{AP} 交 \overline{BC} 於 Q 點。已知 $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ ，求數對 (x, y) 為 (七) 。



8. 在 1781 年，日本藤田貞資於《精要算法》中提出所謂「蟲蝕算」這種填字遊戲。顧名思義，蟲蝕算遊戲就是算式標示 \square 處可表示為被蟲損傷的地方，根據算術或代數推理手段恢復原來的數字使等式成立。下圖是一道稱為〈一個 8〉的蟲蝕算遊戲：

$$\begin{array}{r}
 \square \square \square \\
 \times \quad 8 \square \\
 \hline
 \square \square \square \square \\
 \square \square \square \\
 \hline
 \square \square \square \square
 \end{array}$$

試問：這道遊戲的最後四個數字為何？ (八) 。

《試題結束》