

109 學年度新北市 (板橋高中)
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試(一) 試題

編號：_____ (學生自填)

注意事項：

1. 本試卷共三題計算證明題，滿分為 49 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算過程依序填寫在答案卷內。

問題一： 對於 2×2 階矩陣 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，定義其轉置矩陣 $A^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ 。

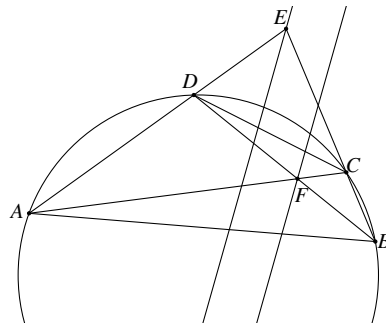
設 A 為 2×2 階矩陣，滿足 $A^T A = A A^T = I$ ，其中 I 為二階單位方陣，且 A 的行列式為 1。證明：矩陣 A 必定可以表達為

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix},$$

其中 θ 為一實數，並滿足 $0 \leq \theta < 2\pi$ 。 (16 分)

問題二： 設凸四邊形 $ABCD$ 外接一圓。已知直線 AD 與 BC 交於一點 E ，並設直線 AC 與 BD 交於一點 F 。考慮 $\angle CED$ 的角平分線與 $\angle DFC$ 的角平分線。

- (1) 若此兩線重合，試證 $\overline{EA} = \overline{EB}$ 。
- (2) 若此兩線不重合，試證此兩線平行。



(16 分)

問題三： 設 f 是從正整數集合映至正整數集合的函數，滿足：對所有的正整數 m, n ，都有

$$f(mn) = f(m)f(n), \quad \text{且} \quad f(f(n)) = n.$$

試求 $f(2020)$ 的最小可能值。 (17分)