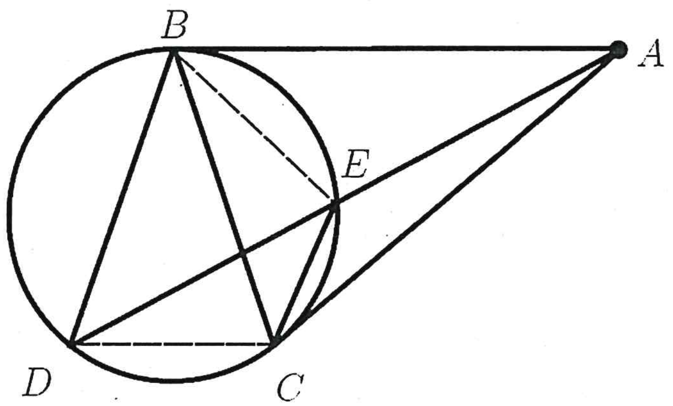
108 學年度高級中學數學科能力競賽決賽

筆試試題（二）【參考解答】

一、【參考解答】

如圖，連接$\overline{BE}$與$\overline{CD}$，設定角度$\angle CDE=\alpha, \angle DCE=\beta$，則

- $\angle CEA=\alpha+\beta$
- $\angle CBD=\angle DEC=180^\circ-\alpha-\beta$
- $\angle CDB=\angle DCB=\angle DEB=\dfrac{\beta+\alpha}{2}$
- $\angle EBA=\angle BDE=\dfrac{\beta+\alpha}{2}-\alpha=\dfrac{\beta-\alpha}{2}$



對ΔACE與ΔABE用正弦定理，得到$\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AC}}=\dfrac{\sin\alpha}{\sin(\beta+\alpha)}$以及$\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AB}}=\dfrac{\sin\left(\dfrac{\beta-\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\beta+\alpha}{2}\right)}$

因為$\overline{AB}=\overline{AC}$，所以

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(\beta+\alpha)}=\frac{\sin\left(\dfrac{\beta-\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\beta+\alpha}{2}\right)}\Rightarrow \sin\alpha=2\cos\left(\frac{\beta+\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)=\sin\beta-\sin\alpha$$

於是$\dfrac{\overline{DE}}{\overline{CE}}=\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}=2$，即$\overline{DE}=2\overline{CE}$。

二、【參考解答】

考慮 $p^2 s=\dfrac{p^2}{\binom{p}{1}^2}+\dfrac{p^2}{\binom{p}{2}^2}+\cdots+\dfrac{p^2}{\binom{p}{p-1}^2}=\dfrac{M}{N},\ M,N\in\mathbb{N},\ \ (M,N)=1$。

原題等價於 M 是 p 的倍數。

計算有理數系中的同餘：設 $1\le k\le p-1$，則有

$$\frac{p}{\binom{p}{k}}=\frac{k!(p-k)!}{(p-1)!}=\frac{k!}{(p-1)(p-2)\cdots(p-k+1)}\equiv(-1)^{k-1}k\ (\bmod p)$$

故

$$\sum_{k=1}^{p-1}\frac{p^2}{\binom{p}{k}^2}\equiv\sum_{k=1}^{p-1}k^2 \quad (\bmod p)$$

$$=\frac{(p-1)p(2p-1)}{6}\equiv 0 \quad (\bmod p)$$

（ $\because p$ 為大於 3 的質數）

所以 M 必為 p 的倍數，得證。

三、【參考解答】

令 $f(x)=\sum_{i=0}^{m}\alpha_i x^i$. 由 $x-y\,|\,x^i-y^i$ 可知 $x-y\,|\,f(x)-f(y)$

反證:

假設 $f(a_{2019})=0$ 則 $a_{2020}=f(a_{2019})=0=a_0$ 且 $a_{2021}=f(a_{2020})=f(a_0)=a_1$.

如果對某個 $k,\ 0\le k\le 2020,\ a_k=a_{k+1}$, 則對所有 $i\ge 0$,

$a_{k+i}=f^i(a_k)=f^i(a_{k+1})=a_{k+i+1}$.

因此對所有 $i\ge 0,\ a_k=a_{k+i}$. 所以對所有 $i\ge 0,\ a_k=a_{k+i}=a_{2020}=0$. 特別是

$a_0 = a_k = 0$.

再由 $a_i = f^i(a_0) = f^i(a_k) = a_{k+i} = 0$ 對所有 $i \ge 0$，得 $a_0 = a_1 = \cdots = a_{2019} = 0$，矛盾

故可設對所有 $0 \le k \le 2020$，$a_k \ne a_{k+1}$，

因為 $a_i - a_{i+1} \mid f(a_i) - f(a_{i+1}) = a_{i+1} - a_{i+2}$

所以 $a_0 - a_1 \mid a_1 - a_2 \mid \cdots \mid a_{2019} - a_{2020} \mid a_{2020} - a_{2021}$

特別是 $|a_0 - a_1| \le |a_1 - a_2| \le \cdots \le |a_{2019} - a_{2020}| \le |a_{2020} - a_{2021}|$

由 $a_{2020} = a_0, a_{2021} = a_1$ 得 $|a_0 - a_1| = |a_1 - a_2| = \cdots = |a_{2019} - a_0| = |a_0 - a_1|$

令 $a_k = \min\{a_0, a_1, \ldots, a_{2019}\}$

如果 $k = 0$ 則由 $|a_{2019} - a_0| = |a_0 - a_1|$ 知 $a_{2019} - a_0 = -(a_0 - a_1)$. 故 $a_1 = a_{2019}$

所以 $a_2 = f(a_1) = f(a_{2019}) = a_{2020} = a_0$. 再由 $a_{2i} = f^{2i}(a_0) = f^{2i}(a_2) = a_{2+2i}$ 對所有

$i \ge 0$ 可得

$0 = a_0 = a_2 = \cdots = a_{2018}$，故 $a_1, a_2, \ldots, a_{2019}$ 裡最多只有 $2019 - \dfrac{2018}{2} = 1010$ 個是不

等於0，矛盾.

如果 $k \ge 1$ 則由 $|a_{k-1} - a_k| = |a_k - a_{k+1}|$ 可知 $a_{k-1} - a_k = -(a_k - a_{k+1})$ 故 $a_{k-1} = a_{k+1}$. 所

以 $a_{2020} = f^{2020-k+1}(a_{k-1}) = f^{2020-k+1}(a_{k+1}) = a_{2022}$. 再由 $a_2 = f^2(a_0) = f^2(a_{2020}) = a_{2022}$

得 $a_0 = a_{2020} = a_{2022} = a_2$. 其餘證明同上.