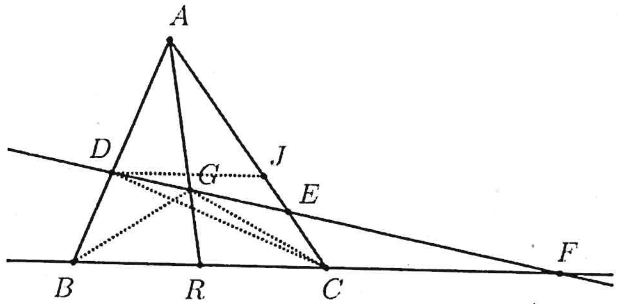
108 學年度高級中學數學科能力競賽決賽

筆試試題（一）【參考解答】

一、【參考解答】



對ΔBDF及截線AEC使用孟氏定理得

$\dfrac{DA}{AB}\cdot\dfrac{BC}{CF}\cdot\dfrac{FE}{ED}=1$。因$EF=DE$，

得$\dfrac{DA}{AB}=\dfrac{CF}{BC}$（設$=\lambda$）。設$R$是$BC$的中點

則A,G,R共線。對ΔABR及截線 DGF使用

孟氏定理得$\dfrac{AG}{GR}\cdot\dfrac{RF}{FB}\cdot\dfrac{BD}{DA}=1$。

觀察$\dfrac{AG}{GR}=2$，$\dfrac{RF}{FB}=\dfrac{\frac{1}{2}+\lambda}{1+\lambda}$，$\dfrac{BD}{DA}=\dfrac{1-\lambda}{\lambda}$，得$\dfrac{1-\lambda}{\lambda}\cdot\dfrac{1+2\lambda}{1+\lambda}=1$。化簡並解得

$\lambda=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$。由此得$AR=\dfrac{3}{2}AG=\dfrac{3}{2}DA=\dfrac{3}{2}AB\cdot\dfrac{CF}{BC}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}AB$。

因此$AB^2+AC^2=2AR^2+\dfrac{1}{2}BC^2=\dfrac{3}{2}AB^2+\dfrac{1}{2}BC^2$或$2AC^2=AB^2+BC^2$。

若$AB=BC$，則由上式得$AC=AB$。若$AC=AB$，則由上式得$AC=BC$。

若$AC=BC$，則由上式得$AC=AB$。不管那一種情形，都可得ΔABC是正三角形。因此$\angle DAG=30^\circ,\angle ADE=75^\circ$，故$\angle BFD=\angle ADE-60^\circ=15^\circ$

二、【參考解答】

設$a_1\le a_2\le\cdots\le a_{101}$，其中最大数 a_{101} 滿足$101\le a_{101}\le 149$，並令$a_{100}=k$，則$2\le k\le 100$。

首先證明：這 101 個數中至少有$k-1$個數的值為 1，即$a_1=a_2=\cdots=a_{k-1}=1$。

假設至多有$k-2$個数的值為 1，則除了$a_{101}\ge 101$及$a_{100}=k$ 外，其餘的至少有

$101-k$個數的值不少於2，由此可推得以下的矛盾式：

$300=a_1+a_2+\cdots+a_{100}+a_{101}\geq(k-2)\times1+(101-k)\times2+k+101=301$。

其次，令$b_l=\sum_{i=l}^{100}a_i$，其中$l=1,2,\cdots,100$；則$\langle b_i\rangle$為嚴格遞減的數列，即

$b_1=300-a_{101}>b_2>b_3>\cdots>b_{100}=a_{100}=k$。

由$b_{100}<108<b_1$，得知：存在某$l\geq2$，使得$b_l\leq108<b_{l-1}$。可令$108=b_l+m$，

其中m為非負整數，且$0\leq m<a_{l-1}$。

(1)當$m=0$時，$108=b_l=\sum_{i=l}^{100}a_i=a_l+a_{l+1}+\cdots+a_{100}$。

(2)當$m\geq1$時，由$m<a_{l-1}\leq a_{100}=k$，即$m\leq k-1$，得到$a_1=a_2=\cdots=a_m=1$；

故$m=\sum_{j=1}^{m}a_j$。注意：此時，$m<l-1$。(因為若$m\geq l-1$，則

$m=\sum_{j=1}^{m}a_j\geq\sum_{j=1}^{l-1}a_j\geq a_{l-1}$，此與$m<a_{l-1}$矛盾！)

因此，$108=b_l+m=\sum_{i=l}^{100}a_i+\sum_{j=1}^{m}a_j=a_1+a_2+\cdots+a_m+a_l+a_{l+1}+\cdots+a_{100}$。

三、【參考解答】

先證明：當$n=l^2$，l為正整數，不等式成立。

$$\left[\sqrt{1}\right]^2+\left[\sqrt{2}\right]^2+\cdots+\left[\sqrt{l^2}\right]^2$$
$$=\left(2^2-1^2\right)\cdot1+\left(3^2-2^2\right)\cdot2^2+\cdots+\left(l^2-(l-1)^2\right)\cdot(l-1)^2+l^2$$
$$=\sum_{k=1}^{l-1}\left((k+1)^2-k^2\right)\cdot k^2+l^2=2\sum_{k=1}^{l-1}k^3+\sum_{k=1}^{l}k^2=2\left(\frac{l(l-1)}{2}\right)^2+\frac{l(l+1)(2l+1)}{6}$$
$$=\frac{l}{6}\left(3l(l-1)^2+(l+1)(2l+1)\right)=\frac{l}{6}\left(3l^3-4l^2+6l+1\right)$$

以下證明上式大於或等於$\frac{l^4}{3}$，此等價於檢驗$l\left(3l^3-4l^2+6l+1\right)\geq 2l^4$。

即$l^4-4l^3+6l^2+l\geq 0$。顯然$l^2\left(l^2-4l+6\right)+l\geq 0,\ (l\geq 1)$。

因此，當$n=l^2$（l為正整數)時，不等式成立。

以下假設$n=l^2+k,\ 1\leq k\leq 2l$，此時

$$
\begin{aligned}
&\left[\sqrt{1}\right]^2+\left[\sqrt{2}\right]^2+\cdots+\left[\sqrt{l^2+k}\right]^2\\
&=\left[\sqrt{1}\right]^2+\left[\sqrt{2}\right]^2+\cdots+\left[\sqrt{l^2}\right]^2+\left[\sqrt{l^2+1}\right]^2+\cdots+\left[\sqrt{l^2+k}\right]^2\\
&=\frac{l}{6}\left(3l^3-4l^2+6l+1\right)+kl^2
\end{aligned}
$$

以下證明上式大於或等於$\frac{\left(l^2+k\right)^2}{3},\ 1\leq k\leq 2l$，

$$
\begin{aligned}
&\frac{l}{6}(3l^3-4l^2+6l+1)+kl^2-\frac{(l^2+k)^2}{3}\\
&=\frac{1}{6}\left[l^4-4l^3+6l^2+l+2l^2k-2k^2\right]\\
&=\frac{1}{6}\left[l^4-4l^3+6l^2+l-2\left(k-\frac{l^2}{2}\right)^2+\frac{l^4}{2}\right]
\end{aligned}
$$

上式可視為k的二次函數，因為在$k=0,\frac{l^2}{2},2l$，皆可驗證為非負，所以當

$1\leq k\leq 2l$時，上式皆非負。

故$n=l^2+k,\ 1\leq k\leq 2l$時，不等式仍成立。