

108 學年度全國高中數學科能力競賽決賽

筆試試題（一）

注意事項：

- (1) 時間分配：2 小時（13:30~15:30）。
- (2) 配分：每題皆為 7 分。
- (3) 不可使用計算器。

一、設 $\triangle ABC$ 的其中兩邊等長，其重心是 G 。在 \overline{AB} 上取一點 D 使得 $\overline{AD} = \overline{AG}$ ， \overline{DG} 分別與 $\overline{AC}, \overline{BC}$ 交於點 E, F 。已知 E 為 \overline{DF} 的中點，求 $\angle BFD$ 。

二、有 101 個正整數 a_1, a_2, \dots, a_{101} 滿足 $a_1 + a_2 + \dots + a_{101} = 300$ ，其中的最大數大於 100 且小於 150。試證：在這 101 個數中，必有某些數之和等於 108。

三、當 x 為實數時， $[x]$ 表示不大於 x 的最大整數。證明：當 n 為正整數時，

$$[\sqrt{1}]^2 + [\sqrt{2}]^2 + \dots + [\sqrt{n}]^2 \geq \frac{n^2}{3}$$

恆成立。