

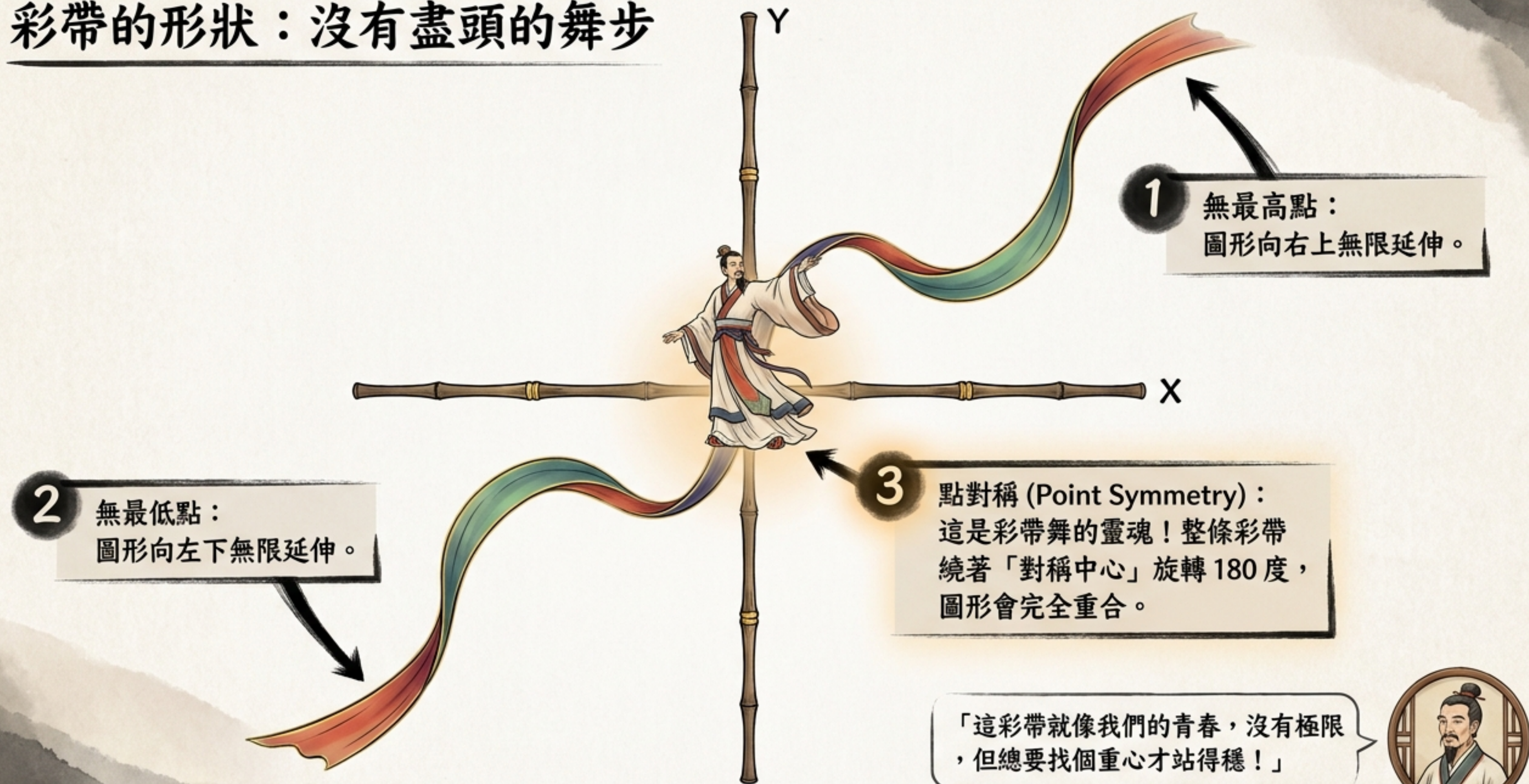
綵衣娛親：三次函數的彩帶舞

高一自主學習秘笈 | 跟著老萊子找對稱中心



「各位少爺千金，今日老萊子不假摔，
給各位舞一段數學彩帶！」

彩帶的形狀：沒有盡頭的舞步



登台前的換裝：從「一般式」到「標準式」

厚重日常服



一般式： $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

- 特點：全部展開的狀態。適合用來看出 y 軸截距（常數項 d ），但完全看不出舞步的重心在哪。

輕盈綵衣



標準式： $y = a(x-h)^3 + p(x-h) + k$

- 特點：經過「配三次方」整理。一眼看穿！重心（對稱中心）就藏在 (h, k) 裡！

今日目標：把一般式脫掉，換上標準式，找出完美舞台重心！

尋找舞台重心：對稱中心 (h, k) 的秘方

第一步：算 h (重心位置)

$$h = -\frac{b}{3a}$$

記住這個口訣，這是啟動換裝的鑰匙！

(將 h 代入原函數)

第二步：算 k (重心高度)

$$k = f(h) = f\left(-\frac{b}{3a}\right)$$

把算出來的 h 丟回原本的長串函數裡，就能得到 k ！

得到對稱中心 (h, k) ，老萊子就知道該站在戲台的哪裡起舞了。

實戰演練：老萊子的登台挑戰

「這件『一般式』衣服太笨重了，少爺千金們，快幫我找出 h 和 k ，我要換上輕盈的綵衣！」

設三次函數 $y = x^3 - 6x^2 + 11x - 3$

任務一：請幫老萊子「換裝」，求出 $y = a(x - h)^3 + p(x - h) + k$ 中的 a, p, h, k 。

任務二：描繪出這個函數的圖形，並明確標示出他的「對稱中心」。

換裝第一步：定位對稱中心 (h, k)

原函數： $y = 1x^3 - 6x^2 + 11x - 3$

求 h ： $h = \frac{-(-6)}{3 * 1} = \frac{6}{3} = 2$

求 k ：將 $x = 2$ 代入原式：

$$k = (2)^3 - 6(2)^2 + 11(2) - 3$$

$$k = 8 - 24 + 22 - 3 = 3$$

對稱中心 = $(2, 3)$

換裝第二步：找出彩帶的扭力 p



「鏘鏘！最難纏的 p 也找到了，
換裝準備完成！」

已知 $a = 1$ ，且中心為 $(2, 3)$ 。目前服裝進度：

$$y = 1(x - 2)^3 + p(x - 2) + 3$$

代入 $x = 0$ 這把萬能鑰匙！

Step A：在原本的式子中，當 $x = 0$ 時，常數項告訴我們 $y = -3$ 。

Step B：把 $(0, -3)$ 代入目前的標準式中：

$$\begin{aligned} -3 &= 1(0 - 2)^3 + p(0 - 2) + 3 \\ -3 &= -8 - 2p + 3 \end{aligned}$$

Step C：解出 p ：

$$-3 = -5 - 2p \Rightarrow 2p = -2 \Rightarrow p = -1$$

完美變身！標準式登場



$$y = x^3 - 6x^2 + 11x - 3$$

$$y = (x - 2)^3 - (x - 2) + 3$$

Anatomy of the Outfit

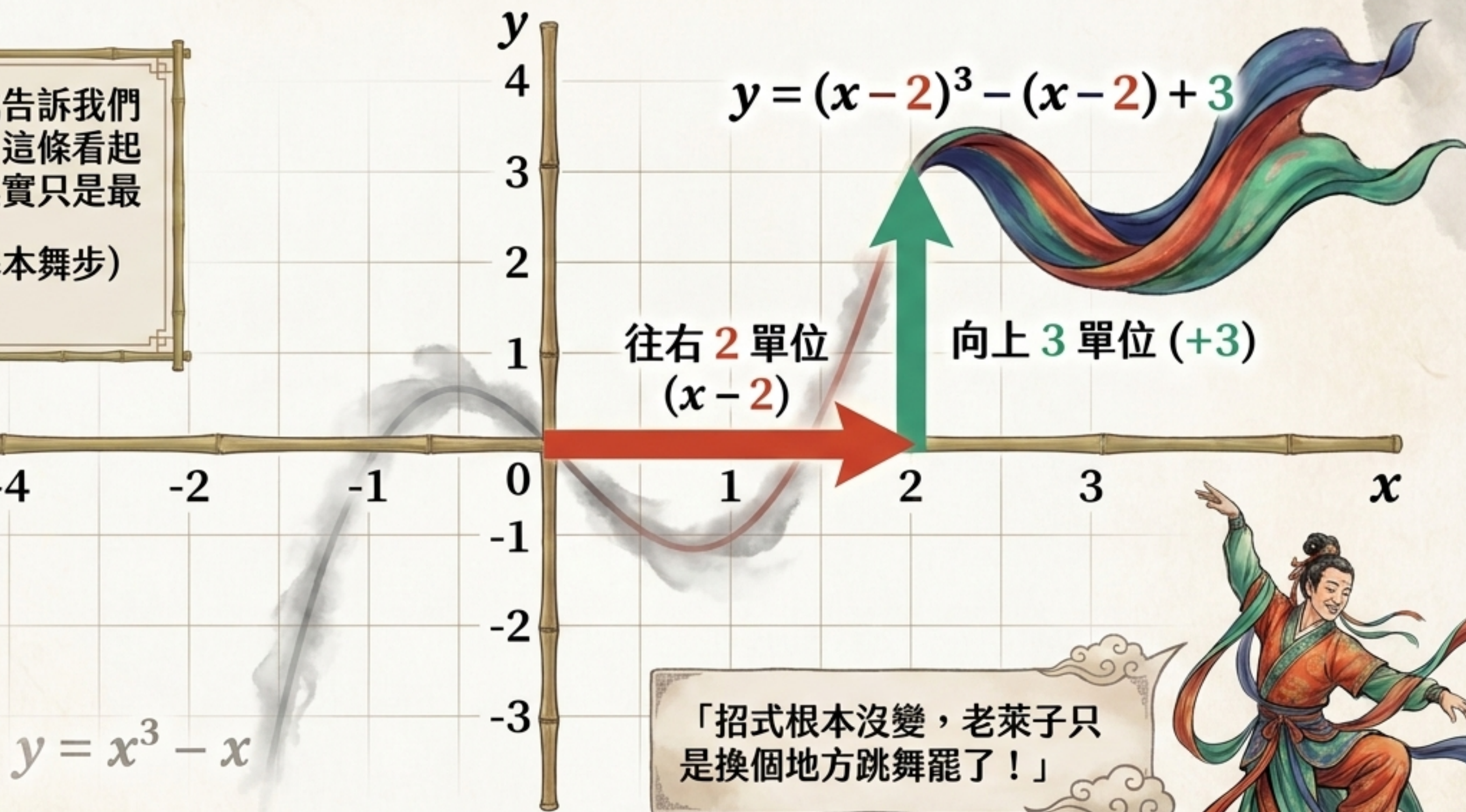
$a = 1$: 決定彩帶開口方向與幅度（正值，右上至左下）。

$p = -1$: 決定彩帶中段的彎曲扭力。

$h = 2, k = 3$: 老萊子站立的絕對重心（2，3）。

舞步平移：從原點到新舞台

核心概念：標準式告訴我們一個天大的秘密：這條看起來複雜的彩帶，其實只是最基礎的 $y = x^3 - x$ （基本舞步）移動了位置！



彩帶舞總訣竅：三次函數的三位一體

公式 (Formula)

核心橋樑。

$$\text{對稱中心 } h = -\frac{b}{3a}$$

是連接兩種服裝的唯一通道。

幾何 (Geometry)

空間平移。所有三次函數，最終都能看看作基本型 $y = ax^3 + px$ 在平面上的「平移」。

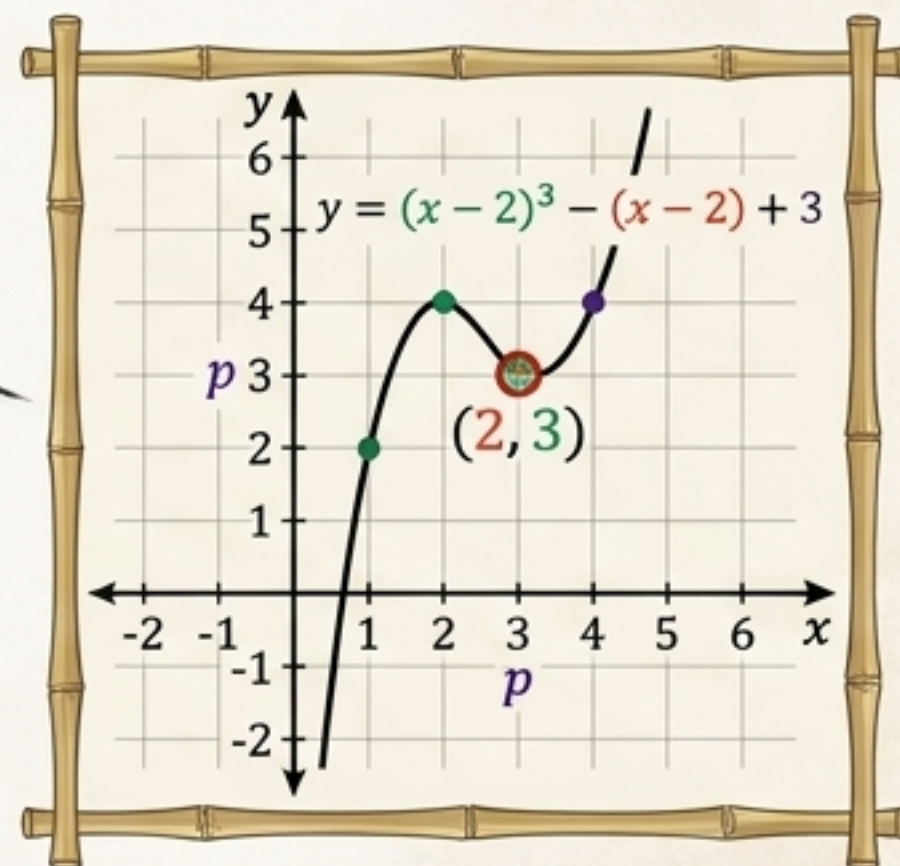
代數 (Algebra)

看透本質。標準式

$$y = a(x - h)^3 + p(x - h) + k$$

把原本雜亂的數字，梳理成帶有明確物理意義的 a, p, h, k 。

對稱中心
(h, k)



換你上場！隨堂練習挑戰

「少爺千金們，現在換你們
拿起筆，舞動這條彩帶吧！
老萊子在台下為你們喝采！」



設三次函數 $y = -x^3 - 3x^2 - 2x - 3$

- ☐ 1. 利用公式求出對稱中心 (h, k) 。
(提示: $a = -1, b = -3$)
- ☐ 2. 運用「 $x=0$ 萬能鑰匙」找出
 p 值，寫出標準式。
- ☐ 3. 說出它是從哪個基本圖形
 $y = ax^3 + px$ 平移而來？

老萊子的錦囊妙計 (解答篇)

重心 (h, k) :

$$h = \frac{-(-3)}{3(-1)} = -1$$

代入得 $k = -(-1)^3 - 3(-1)^2 - 2(-1) - 3 = -3$

重心為 $(-1, -3)$ 。

扭力 p :

設 $y = -1(x+1)^3 + p(x+1) - 3$ ，代入 $(0, -3)$ 得 $p = 1$ 。

標準式： $y = -(x+1)^3 + (x+1) - 3$

平移奧義：由基本圖形 $y = -x^3 + x$ 向左平移 1，向下平移 3 得到。

恭喜掌握三次函數的圖形特徵！
自主學習，完美落幕！

